Caroline Lasser, Ilja Klebanov

17. Dezember 2013

Aufgabe 1 (Exponentialfunktion als Isomorphismus)

(a) Zeigen Sie, dass $\varphi : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot), \quad x \mapsto e^x$ ein Gruppenhomomorphismus ist. Wie lässt sich φ zu einem bijektiven Gruppenhomomorphismus verändern?

(b) Bestimmen Sie die Umkehrabbildung.

(c) Zeichnen Sie ein Diagramm, welches erklärt, wie mittels φ, φ^{-1} und der Addition in $\mathbb{R}$ positive reelle Zahlen multipliziert werden können.

Aufgabe 2 (Polynominterpolation)

Seien $x_0, \dots, x_n \in [-1, 1]$ paarweise verschieden und $y_0, \dots, y_n \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie die Dimension von

$$P_n := \{p : [-1, 1] \to \mathbb{R} \mid p \text{ Polynomfunktion mit } \deg(p) \leq n\}.$$

(b) Zeigen Sie, dass $F : P_n \to \mathbb{R}^{n+1}, \quad p \mapsto (p(x_0), \dots, p(x_n))$ linear ist und bestimmen Sie den Kern von F.

(c) Zeigen Sie mittels (b), dass es genau ein $p \in P_n$ gibt mit $p(x_0) = y_0, \dots, p(x_n) = y_n$.

Aufgabe 3 (Zweiter Isomorphiesatz)

Sei V ein K-Vektorraum und $U, U' \subseteq V$ Unterräume von V, sowie
$F : U \to (U + U')/U', \quad x \mapsto x + U'$. Zeigen Sie:

(a) $kerF = U \cap U'$.

(b) $\tilde{F} : U/(U \cap U') \to (U + U')/U', \quad x + U \cap U' \mapsto x + U'$ ist ein wohldefinierter Isomorphismus.

Aufgabe 4 (Dimensionsformel)

Seien V, W K-Vektorräume, $F : V \to W$ linear und U ein Unterraum von W. Zeigen Sie:

$$\dim(F^{-1}[U]) = \dim(U \cap F[V]) + \dim(\text{Ker}F).$$