

# Lineare Algebra I (Lehramt Gymnasium)

Technische Universität München, WS 2013/14

Vorlesung: Caroline Lasser

(aktualisiert am 31. Januar 2014)

## 1 Vorspiel

**Mengen (15.10.):** intuitiver Mengenbegriff,  $x \in M$ , Teilmengen, Tupel, Durchschnitt, Vereinigung [12x12, §1.5 & §1.6]

**Relationen (18.10.):** Relation, reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, transitiv, Äquivalenzrelation, Äquivalenzklasse, Repräsentantensystem [12x12, §1.7 & 1.9]

**Abbildungen (22.10., Vertretung durch Ilja Klebanov):** Abbildung, Injektion, Surjektion, Bijektion, Komposition, Identitätsabbildung, Umkehrabbildung [F, §1.1]

## 2 Algebraische Strukturen

**Gruppen (25.10.):** Definition Gruppe, Eindeutigkeit von neutralen und inversen Elementen,  $(\mathbb{Z}_m, +)$  [12x12, §6.1]

**Rechnen in Gruppen (29.10.):** Vereinfachter Nachweis der Gruppeneigenschaften, Kürzungs- und Inversenregeln, symmetrische Gruppe, Links- und Rechtstranslation [F, §1.2]

**Untergruppen (05.11.):**  $(\mathbb{Z}_m \setminus \{[0]\}, \cdot)$  ist genau dann eine Gruppe, wenn  $m$  prim ist; Dirichlet'sches Schubfachprinzip, Definition Untergruppe, Untergruppenkriterium, Äquivalenzen modulo einer Untergruppe [F, §1.2.6]

**Faktorgruppen (08.11.):** Definition Normalteiler, Normalteilerkriterium, kommutative Gruppen, Definition und Satz über Faktorgruppen [12x12, §6.4]

**Restklassenringe und Polynome (12.11.):** Definition Ring, einfache Rechenregeln, Polynome als Ring, Polynomfunktion, Nullstelle, Rechenregeln für den Grad, nullteilerfreie Ringe [F, §1.3]

**Körper (15.11.):** Definition Körper, Bruchrechnen, Polynomdivision in  $K[X]$ , Abspalten einer Nullstelle [12x12, §6.8]

**Komplexe Zahlen (19.11.):** komplexe Zahlen als Körper, Fundamentalsatz der Algebra (ohne Beweis), Real- und Imaginärteil, komplexe Konjugation, Betrag und Argument [12x12, §2.4]

### 3 Vektorräume

**Vektorräume (22.11.):** Definition Vektorraum,  $K^n$  und  $K[X]$  als Vektorräume, Rechnen im Vektorraum, Definition Unterraum [12x12, §5.1]

**Lineare Unabhängigkeit (26.11.):** Definition Linearkombination und Spann, Familien von Vektoren, Unterraumkriterium, lineare Unabhängigkeit von Tupeln, Mengen und Familien [12x12, §5.3]

**Basen (29.11.):** Definition Basis, Charakterisierungen, Koordinatenvektoren, Austauschlemma [F, §1.5]

**Dimension (03.12., Vertretung durch Ilja Klebanov):** Austauschatz, Definition Dimension, Basisauswahlsatz, Basisergänzungssatz [F, §1.5]

**Summen von Unterräumen (06.12., Vertretung durch Ilja Klebanov):** Definition, Charakterisierungen der direkten Summe, Dimensionssatz [F, §1.6]

**Quotientenräume (10.12.):** Definition Quotientenraum, Dimensionsformel, Definition Gruppenhomomorphismus [F, §2.2 und §1.2]

### 4 Lineare Abbildungen

**Kern und Bild (13.12.):** Kern und Bild eines Gruppenhomomorphismus, Kern und Bild sind Untergruppen, der Kern sogar ein Normalteiler, Charakterisierung von Injektivität [F, §1.2]

**Lineare Abbildungen (17.12.):** Isomorphiesatz für Gruppenhomomorphismen, Definition lineare Abbildung, Charakterisierung von Injektivität und Surjektivität über Kern und Bild [F, §2.2]

**Lineare Gleichungssysteme (20.12.):** lineare Abbildungen werden auf einer Basis eindeutig festgelegt, die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems ist ein affiner Unterraum [F, §2.2]

**Dimensionsformel (07.01.):** Darstellungen affiner Unterräume, Beweis der Dimensionsformel über den Isomorphiesatz und „zu Fuß“, der Vektorraum der Homomorphismen [F, §2.2]

**Dualräume (10.01.):** Dimension von  $\text{Hom}(V, W)$ , Definition Dualraum und duale Basis, Koordinatenpicker, duale Abbildung, Kern und Bild der dualen Abbildung [12x12, §5.9], [F, §6.1]

## 5 Matrizen

**Matrizen (14.01.):** Definition  $m \times n$  Matrix über einem Körper  $K$ ,  $K^{m \times n}$  ist ein  $K$ -Vektorraum, Einheitsmatrix, Diagonalmatrizen, obere und untere Dreiecksmatrizen [12x12, §5.3]

**Matrizenprodukte (17.01.):** Definition Matrix-Vektor-Produkt, Isomorphie von  $\text{Hom}(K^n, K^m)$  und  $K^{m \times n}$ , Definition Matrizenprodukt, Verknüpfung linearer Abbildungen [F, §2.4, §2.5]

**Darstellende Matrix (21.01.):** Definition darstellende Matrix, Normalformendarstellung, invertierbare Matrizen und allgemeine lineare Gruppe, Charakterisierungen von Invertierbarkeit [F, §2.4, §2.5]

**Elementarmatrizen (24.01.):** Definition Elementarmatrix (Additions-, Multiplikationstyp), jede invertierbare Matrix ist Produkt von Elementarmatrizen, Eliminationsverfahren zur Invertierung [F, §2.7]

**Übergangsmatrizen (28.01.):** Definition Permutationsmatrix, Multiplikationen mit Permutationsmatrizen, Definition Übergangs- oder Transformationsmatrix [F, §2.6, §2.7]

**Transformationsformel & Rang (31.01.):** Beweis der Transformationsformel, äquivalente Matrizen, transponierte Matrix, Dualitätssatz für  $A^t$ , Definition Rang, Zeilenrang gleich Spaltenrang [F, §2.6]

**04.02.**

## **6 Klausur am 07.02.**

Geprüft werden:

1. Grundwissen Begriffe
2. Grundwissen Sätze
3. Verständnis von Zusammenhängen (Ja-Nein-Fragen)
4. Schulwissen vom höheren Standpunkt
5. Beweise
6. Veranschaulichen

## Literatur

- [12x12] O. Deiser, C. Lasser, E. Vogt, D. Werner, 12 x 12 Schlüsselkonzepte zur Mathematik, Springer Spektrum (2011)
- [F] G. Fischer, Lineare Algebra, Vieweg, 17. Auflage (2010)
- [FL] G. Fischer, Lernbuch Lineare Algebra und Analytische Geometrie, Springer Spektrum, 2. Auflage (2012)
- [L] P. Lax, Linear Algebra, Wiley, 1997