Caroline Lasser, Ilja Klebanov 11. Dezember 2012

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe (beispielsweise Mi 8-10 Uhr) oben auf ihre Abgabe und geben Sie keine losen Blätter ab (Tackern/Büroklammer/...).

Aufgabe 1 (Homomorphismen)

Beweisen oder widerlegen Sie, dass folgende Abbildungen Homomorphismen sind:

(a) $(\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Q}^*, \cdot), \quad z \mapsto z^2 + 1.$

(b) $(\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{C}, +), \quad x + iy \mapsto x - iy.$

(c) $(\mathbb{C}^*, \cdot) \to (\mathbb{R}^*, \cdot), \quad x + iy \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}.$

(d) $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +), \quad z \mapsto z^p,$ wobei p eine Primzahl ist.

Aufgabe 2 (Gruppen mit vier Elementen)

Sei G eine Menge bestehend aus 4 Elementen. Bestimmen Sie zwei mögliche Gruppentafeln für G, sodass es keinen Isomorphismus $\varphi : (G, \circ_1) \to (G, \circ_2)$ gibt, d.h. zwei "echt verschiedene" Gruppenstrukturen auf G (mit Beweis!).

Aufgabe 3 (Summen von Vektorräumen)

Sei V ein K-Vektorraum, $U_1, U_2, U_3 \neq \{0\}$ Unterräume von V, so dass gilt:

(i) $V = U_1 + U_2 + U_3$.

(ii) Verschiedene Vektoren $u_1 \in U_1^*, u_2 \in U_2^*, u_3 \in U_3^*$ sind linear unabhängig.

Zeigen Sie:

(a) Jedes $v \in V$ ist eindeutig darstellbar als $v = u_1 + u_2 + u_3$ mit $u_i \in U_i,\ i = 1, \ldots, 3$.

(b) $U_1 \cap (U_2 + U_3) = U_2 \cap U_3 = \{0\}$.

Aufgabe 4 (Exponentialfunktion als Isomorphismus)

(a) Zeigen Sie, dass $\varphi : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}^+, \cdot), \quad x \mapsto e^x$ ein Isomorphismus ist.

(b) Bestimmen Sie die Umkehrabbildung.

(c) Zeichnen Sie ein Diagramm, welches erklärt, wie mittels φ positive reelle Zahlen multipliziert werden können.