Caroline Lasser, Ilja Klebanov 4. Dezember 2012

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe (beispielsweise Mi 8-10 Uhr) oben auf ihre Abgabe und geben Sie keine losen Blätter ab (Tackern/Büroklammer/...).

Aufgabe 1 (Standardbasen)

Seien K ein Körper, $m, n \in \mathbb{N}^*$. Zeigen Sie:

(a) $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ist eine Basis des K^n.

(b) $\{E_{ij} \mid i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n\}$ ist eine Basis des $K^{m \times n}$, wobei E_{ij} die Matrix bezeichnet, deren (i, j)-te Komponente Eins ist und die anderen alle Null.

Aufgabe 2 (Basen finden)

Geben Sie für folgende Vektorräume eine Basis an:

(a) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_3\}$,

(b) $\text{span}(t^2, t^2 + t, t^2 + 1, t^2 + t + 1, t^7 + t^5) \subseteq K[t]$,

(c) $\{f \in \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(x) \neq 0 \text{ für endlich viele } x \in \mathbb{R}\}$.

Aufgabe 3 (Polynome)

Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\mathbb{R}[t]_{\leq n} := \{f \in \mathbb{R}[t] \mid \deg(f) \leq n\}$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}[t]_{\leq n}$ stets ein Untervektorraum von $\mathbb{R}[t]$ ist.

(b) Seien $p_0, \ldots p_n \in \mathbb{R}[t]_{\leq n}$ Polynome mit der Eigenschaft $\deg(p_j) = j$ für alle $j = 0, \ldots, n$. Zeigen Sie, dass $(p_0, \ldots, p_n)$ eine Basis von $\mathbb{R}[t]_{\leq n}$ bildet.

(c) Bilden die Lagrange-Polynome ℓ_j, $j = 0, \ldots, n$ von Blatt 5, Aufgabe 3 ebenfalls eine Basis von $\mathbb{R}[t]_{\leq n}$?

Aufgabe 4 (K^n für endliche Körper)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und p eine Primzahl. Wir betrachten den Vektorraum $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$ über dem Körper $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

(a) Skizzieren Sie alle eindimensionalen Unterräume von $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$.

(b) Wieviele eindimensionale Unterräume besitzt $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$ allgemein?