Caroline Lasser, Ilja Klebanov 27. November 2012

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe (beispielsweise Mi 8-10 Uhr) oben auf ihre Abgabe und geben Sie keine losen Blätter ab (Tackern/Büroklammer/...).

Aufgabe 1 (Lineare Unabhänigkeit)

Seien V ein K-Vektorraum, $v_1, \dots, v_n \in V$, $n \geq 2$, paarweise verschieden und $M = \{v_1, \dots, v_n\}$. Beweisen Sie:
M ist genau dann linear abhängig, wenn $v_j \in \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n\}$ für ein $j \in \{1, \dots, n\}$ gilt.

Aufgabe 2 (Lineare Unabhängigkeit)

Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Ferner seien vier linear unabhängige Vektoren $v_1, \dots, v_4$ aus V gegeben. Sind dann auch die Vektoren

$$w_1 = v_1 + v_2, \quad w_2 = \frac{1}{2}(v_1 + v_2 + v_3 + 2v_4), \quad w_3 = v_2 + 3v_4, \quad w_4 = v_3 - v_4$$

linear unabhängig?

Aufgabe 3 (Lineare Unabhängigkeit von Polynomen und Funktionen)

Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) $\{t^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist linear unabhängig in $K[t]$.

(b) $\{\sin(2^n x) \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist linear unabhängig in $\operatorname{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Aufgabe 4 (die Ebene)

Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$. Geben Sie eine 1000-elementige Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^2$ an, welche die Eigenschaft hat, dass jede zweielementige Teilmenge von M linear unabhängig in $\mathbb{R}^2$ ist, und skizzieren Sie diese.
Zusatz: Wie groß kann so eine Menge sein?