Caroline Lasser, Ilja Klebanov
20. November 2012

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe (beispielsweise Mi 8-10 Uhr) oben auf ihre Abgabe und geben Sie keine losen Blätter ab (Tackern/Büroklammer/...).

Aufgabe 1 (Schnitte von Vektorräumen)

Sei V ein Vektorraum mit Unterräumen $U_1, U_2 \subseteq V$. Zeigen Sie, dass der Schnitt $U_1 \cap U_2$ wieder ein Unterraum von V ist.

Aufgabe 2 (Vereinigungen von Unterräumen)

Sei V ein Vektorraum, $U, U' \subseteq V$ Unterräume von V. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) $U \cup U'$ ist ein Unterraum von V.

(b) Ist $U \cup U'$ ein Unterraum von V, so gilt $U \subseteq U'$ oder $U' \subseteq U$.

Aufgabe 3 (Funktionenräume)

Sei $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der Vektorraum der Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass $U = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = f(x + 2\pi) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}$ ein Unterraum von $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{span}\left(\{\cos(nx) \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \{\sin(nx) \mid n \in \mathbb{Z}\}\right)$ ein Unterraum von U ist.

Aufgabe 4 (Unterräume)

Skizzieren Sie die folgenden Mengen $U_1, \ldots, U_4$ und beweisen oder widerlegen Sie für jede dieser Mengen, ob sie einen Unterraum des $\mathbb{R}^2$ bildet:

(a) $U_1 = \{0\}$

(b) $U_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$

(c) $U_3 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$

(d) $U_4 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \cdot x_2 \geq 0\}$