Caroline Lasser, Ilja Klebanov 6. November 2012

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe (beispielsweise Mi 8-10 Uhr) oben auf ihre Abgabe, damit wir Ihnen die korrigierte Lösung zurückgeben können!

Aufgabe 1 (Körper)

Sei K ein Körper. Beweisen Sie:

(a) $1 \neq 0$.

(b) Für alle $a, b \in K$ gilt: $a \cdot b = 0$ genau dann, wenn $a = 0$ oder $b = 0$.

Aufgabe 2 (Angeordnete Körper)

Sei K ein angeordneter Körper und $x, y \in K$. Beweisen Sie:

(a) Aus $0 \leq x, y$ folgt $0 \leq x + y$.

(b) Aus $x, y \leq 0$ folgt $x + y \leq 0$ und $0 \leq xy$.

(c) Aus $x \leq 0$ und $0 \leq y$ folgt $xy \leq 0$.

Aufgabe 3 (Komplexe Zahlen)

Der Betrag von $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ ist $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Zeigen Sie:

(a) $|z| \geq 0$ und $|z| = 0$ gdw. $z = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

(b) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
Hinweis: Arbeiten Sie mit $|z_1 + z_2|^2$ und $(|z_1| + |z_2|)^2$.

Aufgabe 4 (Restklassenring)

Zeigen Sie die Wohldefiniertheit der Multiplikation in $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ und visualisieren Sie $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ in Analogie zu den Beispielen im Eintrag "Restklassenring" der deutschen Wikipedia.