Caroline Lasser, Ilja Klebanov 30. Oktober 2012

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe (beispielsweise Mi 8-10 Uhr) oben auf ihre Abgabe, damit wir Ihnen die korrigierte Lösung zurückgeben können!

Aufgabe 1 (Ringe mit zwei Elementen)

Geben Sie alle möglichen Additions- und Multiplikationstafeln an, bezüglich derer $M = \{a, b\}$ ein Ring ist. Begründen Sie ihre Einträge kurz.
(Sie dürfen annehmen, dass a dass neutrale Element bezüglich der Addition bezeichnet.)

Aufgabe 2 (Multiplikation in Faktorgruppen)

Sei G eine Gruppe, U ein Normalteiler von G und $a, a', b, b' \in G$.
Zeigen Sie, dass aus $aU = a'U$ und $bU = b'U$ stets $(ab)U = (a'b')U$ folgt.

Aufgabe 3 (Invertierbarkeit in $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$)

Sei $x \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z},\ x \neq 0,\ m > 0$.
Zeigen Sie: Entweder gibt es $y \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z},\ y \neq 0$ mit $xy = 0$ oder x ist invertierbar.

Aufgabe 4 (Äquivalenzrelationen)

Sei M eine Menge und $\sim_1,\ \sim_2$ Äquivalenzrelationen auf M.

(a) Zeigen Sie, dass
$$x \sim y \ :\Longleftrightarrow x \sim_1 y \text{ und } x \sim_2 y$$
eine Äquivalenzrelation auf M definiert.

(b) $\sim_1$ soll genau n und $\sim_2$ genau m Äquivalenzklassen besitzen.
Wie viele Äquivalenzklassen gibt es maximal für $\sim$? Begründen Sie Ihre Antwort mit einer Skizze.