

Aufgabe 1 (Die Symmetrische Gruppe S_3)

Sei $X = \{a, b, c\}$ eine 3-elementige Menge und S_3 die Menge aller Bijektionen von X nach X , d.h. $S_3 = \{f : X \rightarrow X \mid f \text{ bijektiv}\}$.

- (a) Man zeige, dass (S_3, \circ) eine Gruppe aus sechs Elementen bildet (die Komposition von Abbildungen wird also als innere Verknüpfung auf G betrachtet).
- (b) Beweisen Sie, dass (S_3, \circ) keine kommutative Gruppe ist.

Aufgabe 2 (Untergruppen von S_3)

Bestimmen Sie alle Untergruppen der symmetrischen Gruppe S_3 (wie immer mit Beweis, dass es sich tatsächlich um Untergruppen handelt und dass es keine weiteren gibt).

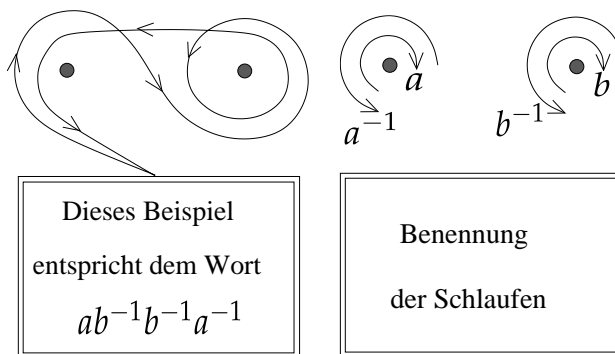
Aufgabe 3 (Drehungen und Spiegelungen)

Stellen Sie einen Zusammenhang her zwischen der symmetrischen Gruppe S_3 und allen Spiegelungen und Drehungen eines gleichseitigen Dreieckes, welche das Dreieck auf sich selbst abbilden. Belegen Sie Ihre Argumentation durch Skizzen.

Aufgabe 4 (Bild aufhängen)

Ein Mathematiker möchte ein Bild, an dem eine lange Schlaufe befestigt ist, so an zwei Nägeln aufhängen, dass es herunterfällt, sobald man einen beliebigen Nagel entfernt.

(In dem Beispiel rechts fällt es herunter, wenn man den rechten Nagel herauszieht, nicht aber, wenn man den linken Nagel entfernt.)



- (a) Versuchen Sie (nicht länger als 10 Minuten lang) mit Bleistift und Papier eine Lösung für das Problem zu finden .
- (b) Wir identifizieren die Menge M aller möglichen Aufhängungen als Menge aller Wörter, die man aus den vier "Buchstaben" a, a^{-1}, b, b^{-1} (vgl. Bild) bilden kann (inklusive dem leeren Wort aus 0 Buchstaben, welches wir mit e bezeichnen), in Formeln

$$M = \{x_1x_2 \dots x_n \mid x_i \in \{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}, n \in \mathbb{N}\}.$$

Als Verknüpfung führen wir ein: $(x_1x_2 \dots x_n) * (y_1y_2 \dots y_m) = x_1x_2 \dots x_ny_1y_2 \dots y_m$, wobei wir $aa^{-1} = bb^{-1} = a^{-1}a = b^{-1}b = e$ vereinbaren.

Begründen Sie, warum diese Vereinbarung für obiges Problem Sinn macht und warum (M, \circ) eine Gruppe ist. Was ist das inverse Element zu $ab^{-1}b^{-1}a^{-1}$?

- (c) Überlegen Sie sich, was es in der neuen Sprache bedeutet, einen Nagel herauszuziehen, und lösen Sie nun das Problem.
- (d) Lösen Sie das gleiche Problem für drei bzw. vier Nägel.