Caroline Lasser, Ilja Klebanov 29. Januar 2013

Dieses außerplanmäßige Übungsblatt dient lediglich der Klausurvorbereitung. Es wird weder abgegeben, noch besprochen.

Aufgabe 1 (Gaußsches Eliminationsverfahren)

Lösen Sie mit Gaußscher Elimination

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 (Dreiecksmatrizen)

Sei $A \in K^{n \times n}$ eine obere Dreiecksmatrix.

(a) Zeigen Sie, dass A genau dann invertierbar ist, wenn alle Diagonaleinträge ungleich Null sind.

(b) Gilt dasselbe für untere Dreiecksmatrizen?

Aufgabe 3 (Zeilenstufenform)

Sei $A \in GL(n, K)$ und $S_1, ..., S_k \in GL(n, K)$ elementare Zeilenumformungen derart, dass $B = S_k ... S_1 A$ Zeilenstufenform hat.

(a) Zeigen Sie, dass B eine invertierbare obere Dreiecksmatrix ist.

(b) Zeigen Sie, dass es endlich viele elementare Zeilenumformungen $T_1, ... T_l \in GL(n, K)$ gibt mit $T_l ... T_1 B = Id$.

(c) Zeigen Sie, dass A endliches Produkt von elementaren Zeilenumformungen ist.

Aufgabe 4 (Elementarmatrizen)

Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K^{2 \times 2}$.

(a) Bringen Sie A auf Zeilenstufenform.

(b) Charakterisieren Sie den Fall $rang(A) = 1$ mittels a, b, c, d.

(c) Charakteresieren Sie den Fall $A \in GL(2, K)$ mittels a, b, c, d.