Caroline Lasser, Ilja Klebanov 22. Januar 2013

Aufgabe 1 (Basiswechselmatrizen)

Seien $A = (e_1, e_2, e_3)$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$ und $B = (e_1 + e_2, 3e_1 + e_2, 2e_1 + e_3)$.

(a) Zeigen Sie, dass B eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Bestimmen Sie die Transformationsmatrizen für den Basiswechsel von A nach B und von B nach A.

Aufgabe 2 (Ähnliche Matrizen)

$A, B \in K^{n\times n}$ heißen ähnlich, wenn es eine Matrix $S \in GL(n, K)$ mit $A = SBS^{-1}$ gibt, und man schreibt dann $A \sim B$. Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $K^{n\times n}$ definiert.

Aufgabe 3 (Invertieren und Transponieren)

Sei $A \in GL(n, K)$.

(a) Bestimmen Sie $Ker(A^{-1})$, $Im(A^{-1})$ und $rang(A^{-1})$.

(b) Bestimmen Sie $Ker(A^{-T})$, $Im(A^{-T})$ und $rang(A^{-T})$.

Geben Sie jeweils eine kurze Begründung.

Aufgabe 4 (Elementarmatrizen)

Sei $A \in K^{2\times 2}$ beliebig sowie $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie AB_1, B_1A, AB_2, B_2A und beschreiben Sie in Worten das Ergebnis Ihrer Rechnung.

(b) Bestimmen Sie B_1^{-1} und B_2^{-1} mittels (a).