Caroline Lasser, Ilja Klebanov 15. Januar 2013

Aufgabe 1 (Lineare Abbildungen)

Gibt es eine lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$F\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \qquad F\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}, \qquad F\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}?$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2 (Differentiation als lineare Abbildung)

Wir betrachten den Vektorraum $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(a) Zeigen Sie dass, dass die Funktionen sin, cos $\in V$ linear unabhängig sind.

(b) Sei $U = \mathrm{span}(\sin, \cos) \subseteq V$. Zeigen Sie, dass $F : f \mapsto f'$ eine lineare Abildung von U nach U ist (f' bezeichnet die Ableitung von f).

(c) Bestimmen Sie die darstellende Matrix von F bezüglich der Basis $(\sin, \cos)$.

Aufgabe 3 (Dreiecksmatrizen)

$A \in K^{n\times n}$ heißt obere Dreiecksmatrix, falls $a_{ij} = 0$ für $j < i$. Zeigen Sie:

(a) Das Produkt zweier oberer Dreiecksmatrizen ist stets eine obere Dreiecksmatrix.

(b) Ist A eine obere Dreiecksmatrix mit $a_{ii} = 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$, so existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $A^m = 0$.

Aufgabe 4 (Vandermonde-Matrix)

Seien $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ paarweise verschieden. Die sogenannte Vandermonde-Matrix ist gegeben durch

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{pmatrix}.$$

(a) Formulieren Sie das Gleichungssystem $V\begin{pmatrix}a_0\\ \vdots \\ a_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y_0\\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix}$ als Polynominterpolationsaufgabe.

(b) Welchen Rang hat V?