Caroline Lasser, Ilja Klebanov 8. Januar 2013

Aufgabe 1 (Lineare Gleichungssysteme)
Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Untersuchen Sie die folgenden Gleichungssysteme darauf, ob sie eindeutig lösbar sind:

$$Ax = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}, \qquad Bx = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

(b) Untersuchen Sie die Gleichungssysteme $Ax = b$ und $Bx = b$ für beliebige $b \in \mathbb{R}^3$ darauf, ob sie universell lösbar sind.

Aufgabe 2 (Polynominterpolation)
Seien $x_0, \ldots, x_n \in [-1, 1]$ paarweise verschieden und $y_0, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie die Dimension von

$$P_n := \{p : [-1, 1] \to \mathbb{R} \mid p \text{ Polynomabbildung mit } \deg(p) \leq n\}.$$

(b) Zeigen Sie, dass $F : P_n \to \mathbb{R}^{n+1}, \quad p \mapsto (p(x_0), \ldots, p(x_n))$ linear ist und bestimmen Sie den Kern von F.

(c) Zeigen Sie mittels (b), dass es genau ein $p \in P_n$ gibt mit $p(x_0) = y_0, \ldots, p(x_n) = y_n$.

Aufgabe 3 (Zweiter Isomorphiesatz)
Sei V ein K-Vektorraum und $U, U' \subseteq V$ Unterräume von V, sowie
$F : U \to (U + U')/U', \quad x \mapsto x + U'$. Zeigen Sie:

(a) $kerF = U \cap U'$.

(b) $\tilde{F} : U/(U \cap U') \to (U + U')/U', \quad x + U \cap U' \mapsto x + U'$ ist ein wohldefinierter Isomorphismus.

Aufgabe 4 (Metall-Legierungen)
Es seien Metall-legierungen M1, M2 und M3 gegeben, die alle Kupfer, Silber und Gold enthalten, und zwar in folgenden Prozentsätzen:

	Kupfer	Silber	Gold
M1	20	60	20
M2	70	10	20
M3	50	50	0

Kann man diese Legierungen so mischen, dass eine Legierung entsteht, die 40% Kupfer, 50% Silber und 10% Gold enthält?