

**Aufgabe 1** (Lineare Abbildungen)

Beweisen oder widerlegen Sie, dass folgende Abbildungen linear sind:

- (a)  $\varphi_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (3x + 2y, x).$
- (b)  $\varphi_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto ax + b,$  wobei  $a, b \in \mathbb{R}.$
- (c)  $\varphi_3 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \bar{z}.$
- (d)  $\varphi_4 : \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto f(1).$

**Aufgabe 2** (Dimensionsformel)

Sei  $F : V \rightarrow W$  linear und  $U$  ein Unterraum von  $W$ . Zeigen Sie:

$$\dim(F^{-1}[U]) = \dim(U \cap F[V]) + \dim(\text{Ker}F).$$

**Aufgabe 3** (Transformationen der Ebene)

Erklären Sie die Wirkung folgender linearer Abbildungen  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  in Wort und Bild:

- (a)  $x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x.$
- (b)  $x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x.$
- (c)  $x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x.$
- (d)  $x \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x.$

**Aufgabe 4** (Weihnachtsaufgabe)

Der Grinch hat alle 100 Weihnachtselfen, die für das Verpacken der Weihnachtsgeschenke zuständig sind, gefangen. Da er ein Mathematik-Liebhaber ist, gibt er ihnen allerdings die folgende Chance auf Freiheit:

Er stellt sie hintereinander auf, sodass jeder Elf alle vor ihm stehenden Elfen sehen kann, aber nicht diejenigen hinter ihm, und setzt jedem einen roten oder weißen Hut auf. Mit dem hintersten angefangen darf nun jeder Elf die Farbe seines Hutes raten und diejenigen, die richtig raten, werden freigelassen. Vorher gibt er ihnen die Möglichkeit, sich eine Strategie zu überlegen. (Natürlich darf jeder Elf nur "Weiß" oder "Rot" sagen, ansonsten kommt keiner frei; jeder Elf hört jeden Elfen.)

- (a) Finde eine Strategie, sodass möglichst viele Weihnachtselfen sicher entkommen können.
- (b) Wieviele Elfen können entkommen, wenn der Grinch statt zwei Farben fünf verschiedene Farben für die Hüte verwendet?

*Hinweis:* Diejenigen von euch, die sich einen Tip wünschen, finden einen auf der Homepage unter "weiteres Material".