

Bitte schreiben Sie vorne auf ihre Abgabe unbedingt den Termin des Tutoriums, welches Sie besuchen werden, hin (beispielsweise Mi 8-10 Uhr), damit wir Ihnen die korrigierte Lösung zurückgeben können!

Aufgabe 1 (Komposition von Abbildungen)

Es seien $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$, $h : C \rightarrow D$ Abbildungen. Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr sind (Beweis oder Gegenbeispiel).

- (a) Es gilt das Assoziativgesetz: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
(b) Es gilt das Kommutativgesetz: $g \circ f = f \circ g$.

Aufgabe 2 (Bijektionen)

Zeigen Sie:

- (a) Ist $f : A \rightarrow B$ injektiv, so ist $f : A \rightarrow f[A]$ bijektiv.
(b) Ist $f : A \rightarrow B$ bijektiv, so gibt es ein $g : B \rightarrow A$ bijektiv mit $g \circ f = id_A$.
(c) Ist $f : A \rightarrow B$ surjektiv, so existiert ein injektives $g : B \rightarrow A$.
(d) Sind $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ bijektiv, so ist $g \circ f : A \rightarrow C$ bijektiv.

Aufgabe 3 (Wie groß ist \mathbb{Q} ?)

Finden Sie Surjektionen $f_i : \mathbb{N} \rightarrow A_i$ für die folgenden Mengen A_i :

- (a) $A_1 = \mathbb{Z}$
(b) $A_2 = \mathbb{N} \times \{0, \dots, n-1\}$ für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$
(c) $A_3 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
(d) $A_4 = \mathbb{Q}$

Aufgabe 4 (injektiv, surjektiv, bijektiv)

Zeichnen Sie drei Funktionen $f_1, f_2, f_3 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ mit den folgenden Eigenschaften:

- (a) f_1 ist injektiv, aber nicht surjektiv.
(b) f_2 ist surjektiv, aber nicht injektiv.
(c) f_3 ist injektiv und surjektiv, also bijektiv.

Diskutieren Sie diese Eigenschaften anschaulich an den Graphen.

- (d) Die Funktionen f_1, f_2, f_3 sollen nun alle die Zuordnungsvorschrift $f(x) = x^2$ haben, dafür dürfen ihre Definitions- und Wertebereiche frei gewählt werden. Kann man diese so wählen, dass die Funktionen die obigen Eigenschaften erfüllen?