TRIGONALISIERUNG UND SPEKTRALSATZ

CAROLINE LASSER

1. Die Trigonalisierung

Satz 1 (Schur-Zerlegung). *Sei K ein Körper und $n \geq 1$. Dann sind für jede Matrix $A \in K^{n \times n}$ äquivalent:*

(1) *Das charakteristische Polynom von A zerfällt in Linearfaktoren.*
(2) *Es gibt $S \in \mathrm{GL}(n, K)$, so dass SAS^{-1} eine obere Dreiecksmatrix ist.*

Eine Zerlegung

$$A = S^{-1}RS,$$

wobei $R \in K^{n \times n}$ eine obere Dreiecksmatrix und $S \in \mathrm{GL}(n, K)$ sind, heißt eine *Schur-Zerlegung* von A. Auf der Diagonalen der oberen Dreiecksmatrix R stehen die Eigenwerte von A.

Beweis. Wir zeigen (2) $\Rightarrow$ (1). Seien $R = SAS^{-1}$ die obere Dreiecksmatrix und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ ihre Diagonaleinträge. Dann gilt

$$p_A(x) = \det(A - xE_n) = \det(R - xE_n) = (\lambda_1 - x) \cdots (\lambda_n - x),$$

so dass p_A in Linearfaktoren zerfällt.

Für (1) $\Rightarrow$ (2) führen wir einen Induktionsbeweis über n. Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen. Sei $n \geq 2$. Wir wählen ein Eigenpaar (λ_1, v_1) von A und ergänzen zu einer Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ des K^n. Dann gilt für $T^{-1} = (v_1, \ldots, v_n)$ dass

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b^t \\ 0 & B \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad b \in K^{n-1}, B \in K^{(n-1)\times(n-1)}.$$

Wegen

$$\begin{aligned} p_A(x) &= \det(A - xE_n) = \det(TAT^{-1} - xE_n) = (\lambda_1 - x)\det(B - xE_{n-1}) \\ &= (\lambda_1 - x)p_B(x), \end{aligned}$$

zerfällt auch p_B in Linearfaktoren. Nach Induktionsannahme gibt es eine invertierbare Matrix $S_* \in \mathrm{GL}(n-1, K)$, so dass $S_*BS_*^{-1}$ eine obere Dreiecksmatrix ist. Setzen wir

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S_* \end{pmatrix} T,$$

so gilt wie gewünscht

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S_* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & b^t \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S_*^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b^t S_*^{-1} \\ 0 & S_*BS_*^{-1} \end{pmatrix}.$$

□

Korollar 1 (Unitäre Schur-Zerlegung). *Für $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gibt es eine unitäre Matrix $U \in U(n)$, so dass UAU^* eine obere Dreiecksmatrix ist.*

Date: 17. Juni 2016.

Beweis. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra zerfällt jedes Polynom über $\mathbb{C}$, und damit auch p_A. Nach obigem Satz gibt es also $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, so dass SAS^{-1} eine obere Dreiecksmatrix ist. Sei $S^{-1} = U^{-1}R$ eine QR-Zerlegung mit $U \in U(n)$ und R eine obere Dreiecksmatrix. Dann ist

$$UAU^* = UAU^{-1} = R(SAS^{-1})R^{-1}$$

als Produkt oberer Dreiecksmatrizen eine obere Dreiecksmatrix. □

2. Der Spektralsatz

Satz 2 (Spektralsatz für komplexe Matrizen)**.** *Für $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sind äquivalent:*

(1) $A = A^*$
(2) $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$ *und es gibt* $S \in U(n)$*, so dass* SAS^* *diagonal ist.*

Beweis. Wir zeigen zuerst (1) $\Rightarrow$ (2). Sei also $\lambda \in \sigma(A)$ und v ein zugehöriger Eigenvektor. Dann gilt

$$\lambda\langle v, v\rangle = \langle v, \lambda v\rangle = \langle v, Av\rangle = \langle A^*v, v\rangle = \langle Av, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \bar{\lambda}\langle v, v\rangle,$$

so dass wegen $v \neq 0$ auch $\lambda = \bar{\lambda}$ folgt. Also gilt $\lambda \in \mathbb{R}$ und damit $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$. Betrachten wir noch eine Schur-Zerlegung von A,

$$A = S^*RS,$$

wobei $S \in U(n)$ und R eine obere Dreiecksmatrix ist. Dann gilt $A^* = S^*R^*S$, so dass wegen $A = A^*$ auch $R = R^*$ gilt, und R eine Diagonalmatrix ist.

Wir zeigen nun (2) $\Rightarrow$ (1). Sei also $A = S^*DS$, wobei $S \in U(n)$ und D die Diagonalmatrix ist, deren Diagonaleinträge die Eigenwerte von A sind. Wegen $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$ gilt $D = D^*$ und damit auch

$$A^* = S^*D^*S = S^*DS^* = A.$$

□