NACHLESE ZUR LINEAREN ALGEBRA II

CAROLINE LASSER

1. Polynome

Sei K ein Körper und

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

ein Polynom vom Grad $\leq n$ mit Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n \in K$.

Handelt es sich bei $K = \mathbb{C}$ um den Körper der komplexen Zahlen, so wissen wir nach dem Fundamentalsatz der Algebra, dass das Polynom p in Linearfaktoren zerfällt. Das bedeutet, dass es n nicht notwendiger Weise verschiedene komplexe Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ gibt, so dass

$$p(x) = a_n (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_n).$$

Insbesondere gilt dann auch

$$p(\lambda_1) = \ldots = p(\lambda_n) = 0.$$

Wir können also von den Linearfaktoren eines zerfallenden Polynoms die Nullstellen ablesen. Betrachten wir als Beispiel das charakteristische Polynom p_A der komplexen 2×2 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2i \\ 1 & i \end{pmatrix}.$$

Wir haben

$$p_A(x) = \det(A - xE_2) = (2 - x)(i - x) - 2i = x^2 - x(2 + i).$$

In diesem Fall läßt sich x ausklammern, und wir lesen von

$$p_A(x) = x\,(x - (2 + i))$$

die beiden Nullstellen $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 2 + i$ ab.

2. Der Satz von Pythagoras

Die Elementargeometrie formuliert den Satz des Pythagoras als

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

und meint damit, dass in rechtwinkligen Dreiecken die Summe der Längenquadrate der beiden Katheten $a^2 + b^2$ die Länge der Hypotenuse im Quadrat c^2 ergibt.

Allgemeiner formulieren wir den Satz des Pythagoras in euklidischen oder unitären Vektorräumen V mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ folgendermaßen: Sind $v, w \in V$ zwei Vektoren, die aufeinander senkrecht stehen, so gilt

$$\|v\|^2 + \|w\|^2 = \|v - w\|^2,$$

wobei $\| \cdot \|$ die zum Skalarprodukt gehörige euklidische Länge bezeichnet.

Date: 28. Juli 2016.

Beweis.

$$\begin{aligned}\|v-w\|^2 &= \langle v-w, v-w\rangle = \|v\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\langle v,w\rangle + \|w\|^2 \\ &= \|v\|^2 + \|w\|^2,\end{aligned}$$

da $\langle v,w\rangle = 0$. □

3. Das Kreuzprodukt

Das Kreuzprodukt zweier Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^3$ ist nicht *der* auf a und b senkrecht stehende Vektor (von denen gibt es nämlich viele), sondern *der* durch die Beziehung

$$\forall x \in \mathbb{R}^3 : \ \langle a \times b, x\rangle = \det(a,b,x)$$

eindeutig festgelegte Vektor $a \times b \in \mathbb{R}^3$. Hier ist $\langle \cdot,\cdot\rangle$ das Standardskalarprodukt des $\mathbb{R}^3$.

Weshalb legt diese Beziehung den Vektor $a \times b$ tatsächlich eindeutig fest? Angenommen, $v \in \mathbb{R}^3$ wäre derart, dass

$$\forall x \in \mathbb{R}^3 : \ \langle v, x\rangle = \det(a,b,x).$$

Dann hätten wir auch $\langle a \times b, x\rangle = \langle v, x\rangle$ und $\langle a \times b - v, x\rangle = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$. Insbesondere gilt dann

$$\langle a \times b - v, a \times b - v\rangle = 0.$$

Die Definitheit von Skalarprodukten läßt den Nullvektor als den einzigen Vektor übrig, der auf sich selbst senkrecht steht. Es gilt also $v = a \times b$.

4. Reelle und komplexe Matrizen

Betrachten wir eine hermitesche Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Die Eigenschaft $A = A^*$ bedeutet für die Matrixeinträge

$$\forall k, l = 1, \ldots, n : \ a_{k,l} = \overline{a_{l,k}}.$$

Auf der Diagonalen erhalten wir deshalb

$$\forall k = 1, \ldots, n : \ a_{kk} \in \mathbb{R}.$$

Die Nebendiagonaleinträge müssen *nicht* reell sein. Zum Beispiel ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}$$

eine hermitesche 2×2 Matrix mit komplexen Nebendiagonaleinträgen. Hingegen sind die Eigenwerte einer hermiteschen Matrix alle reell,

$$\sigma(A) \subset \mathbb{R}.$$

Beweis. Sei (λ, v) ein Eigenpaar einer hermiteschen Matrix A. Dann gilt

$$\lambda\langle v,v\rangle = \langle v, \lambda v\rangle = \langle v, Av\rangle \overset{*}{=} \langle Av, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \overline{\lambda}\langle v,v\rangle.$$

Da Eigenvektoren ungleich Null sind, gilt $\langle v,v\rangle \neq 0$, so dass wir $\lambda = \overline{\lambda} \in \mathbb{R}$ erhalten. Die Gleichungskette hat an der mit $*$ markierten Stelle die Hermitizität von A verwendet, das Skalarprodukt ist das Standardskalarprodukt des $\mathbb{C}^n$. □

Eine reelle Matrix A kann als Element des $\mathbb{R}^{n\times n}$ betrachet nur reelle Eigenwerte haben, und auch der eigenwertlose Fall kann eintreten. Ein Beispiel einer reellen Matrix A mit $\sigma(A) = \emptyset$ ist die neunzig Grad Drehung

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ihr charakteristisches Polynom

$$p_A(x) = x^2 + 1 = (x+i)(x-i)$$

hat seine Nullstellen $\lambda_1 = -i$ und $\lambda_2 = i$ auf der imaginären Achse.

5. Diagonalisieren

Ist K ein Körper und besitzt $A \in K^{n\times n}$ paarweise *verschiedene* Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$, so gilt folgendes:

(1) Das charakteristische Polynom von A zerfällt in n paarweise verschiedene Linearfaktoren. Jede Nullstelle hat algebraische Vielfachheit Eins.
(2) $\dim \operatorname{Eig}(A, \lambda_k) = 1$ für alle $k = 1, \dots, n$.
(3) A ist diagonalisierbar.

Auch wenn ein Eigenraum $\operatorname{Eig}(A, \lambda)$ ein-dimensional ist, können wir nicht von *dem* Eigvektor sprechen, da für jeden Eigenvektor v zum Eigenwert λ auch αv ein Eigenvektor zum Eigenwert λ ist, sofern $\alpha \neq 0$.

6. Eigenwert Null

Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ ist genau dann invertierbar, wenn $0 \notin \sigma(A)$ gilt.

Beweis. Im Endlich-Dimensionalen fallen Invertierbarkeit und Injektivität einer linearen Abbildung zusammen. Es gilt also:

$$A \in \mathrm{GL}(n, K) \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Kern}(A) = \{0\} \;\Leftrightarrow\; 0 \notin \sigma(A).$$

□

Ist hingegen $0 \in \sigma(A)$, so besteht der Eigenraum $\operatorname{Eig}(A, 0) = \mathrm{Kern}(A)$ aus den Lösungsvektoren des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$. *Nur* für die Nullmatrix ist $\operatorname{Eig}(A, 0)$ der ganze Vektorraum K^n.

7. Die Singulärwertzerlegung

Die Singulärwertzerlegung einer reellen oder komplexen $m \times n$ Matrix A transformiert über

$$\Sigma = SAT^{-1}$$

auf eine diagonale $m \times n$ Matrix

$$\Sigma = \operatorname{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_p)$$

mit $p = \min(m, n)$ eindeutig bestimmten nichtnegativen Diagonaleinträgen

$$\sigma_1, \dots, \sigma_p \geq 0,$$

die wir die Singulärwerte von A nennen. Im Gegensatz zur Eigen-Diagonalisierung, die mit *einer* Transformationsmatrix arbeitet, können die beiden Transformationsmatrizen S und T verschieden sein. Diese Erweiterung garantiert eine diagonale Zerlegung für jede reelle oder komplexe Marix, sogar für rechteckige Matrizen.

Für reelle Matrizen A erfolgt die Zerlegung über orthogonale Matrizen $S \in O(m)$ und $T \in O(n)$, für komplexes A über unitäre Matrizen $S \in U(m)$ und $T \in U(n)$.

Beweis. Wir skizzieren die Konstruktion für eine komplexe Matrix A. Dann ist A^*A eine hermitesche, positive semidefinite $n \times n$ Matrix, und es gibt eine Orthonormalbasis $(v_1, \dots, v_n)$ des $\mathbb{C}^n$ bestehend aus Eigenvektoren von A^*A. Die zugehörigen Eigenwerte sind nichtnegativ, und durch Umnummerierung können wir

$$\lambda_1(A^*A), \dots, \lambda_r(A^*A) > 0 \quad \text{und} \quad \lambda_{r+1}(A^*A), \dots, \lambda_n(A^*A) = 0$$

erreichen, wobei $r = \operatorname{Rang}(A^*A) = \operatorname{Rang}(A)$. Für $j = 1, \dots, r$ setzt man nun

$$\sigma_j(A) = \sqrt{\lambda_j(A^*A)} \quad \text{und} \quad w_j = \frac{1}{\sigma_j(A)} A v_j.$$

Man ergänzt zu einer Orthonormalbasis $w_1, \dots, w_m$ des $\mathbb{C}^m$ und setzt

$$S^* = (w_1, \dots, w_m) \quad \text{und} \quad T^* = (v_1, \dots, v_n).$$

□

Wir halten folgende wichtige Eigenschaften fest:

(1) Die Anzahl der positiven Singulärwerte ist der Rang der Matrix.
(2) Die positiven Singulärwerte einer Matrix A sind die Quadratwurzeln der positiven Eigenwerte von A^*A.
(3) Ist A hermitesch (bzw. symmetrisch im reellen Fall) und positiv semidefinit, so sind Eigen- und Singulärwerte das Gleiche,

$$\sigma(A) = \{\sigma_1(A), \dots, \sigma_p(A)\}.$$