Übung zu Skalarprodukten und Normen

1. *Cauchy–Schwarz Ungleichung*
   Sei V ein unitärer Vektorraum.

   a) zu Zeigen: Für $v, w \in V$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt:

   $$0 \leq \|v\|^2 - 2\mathrm{Re}(\lambda\langle v, w\rangle) + |\lambda|^2\|w\|^2.$$

   Beweis:

   $$\begin{aligned}
   0 \leq \|v - \lambda w\|^2 &= \langle v - \lambda w, v - \lambda w\rangle = \langle v, v - \lambda w\rangle - \langle \lambda w, v - \lambda w\rangle \\
   &= \langle v, v\rangle - \langle \lambda w, v\rangle - \langle v, \lambda w\rangle + \bar{\lambda}\lambda\langle w, w\rangle \\
   &= \langle v, v\rangle - \bar{\lambda}\langle w, v\rangle - \lambda\langle v, w\rangle + |\lambda|^2\langle w, w\rangle \\
   &= \langle v, v\rangle - \overline{\lambda\langle v, w\rangle} - \lambda\langle v, w\rangle + |\lambda|^2\langle w, w\rangle \\
   &= \langle v, v\rangle - (\mathrm{Re}(\lambda\langle v, w\rangle) - i\mathrm{Im}(\lambda\langle v, w\rangle)) - (\mathrm{Re}(\lambda\langle v, w\rangle) + i\mathrm{Im}(\lambda\langle v, w\rangle)) + |\lambda|^2\langle w, w\rangle \\
   &= \|v\|^2 - 2\mathrm{Re}(\lambda\langle v, w\rangle) + |\lambda|^2\|w\|^2
   \end{aligned}$$

   b) Wir verwenden $\lambda = \langle w, v\rangle/\|w\|^2$ mit $w \neq 0$ und setzen in die Ungleichung aus (a) ein:

   $$\begin{aligned}
   0 &\leq \|v\|^2 - 2\mathrm{Re}\left(\frac{\langle w, v\rangle}{\|w\|^2}\langle v, w\rangle\right) + \left|\frac{\langle w, v\rangle}{\|w\|^2}\right|^2\|w\|^2 \\
   &= \|v\|^2 - 2\mathrm{Re}\left(\frac{\langle w, v\rangle\overline{\langle w, v\rangle}}{\|w\|^2}\right) + \frac{|\langle w, v\rangle|^2}{(\|w\|^2)^2}\|w\|^2 \\
   &= \|v\|^2 - 2\mathrm{Re}\left(\frac{|\langle w, v\rangle|^2}{\|w\|^2}\right) + \frac{|\langle w, v\rangle|^2}{\|w\|^2}
   \end{aligned}$$

   Da in der Klammer nur reelle Zahlen stehen (Betrag), können wir den Realteil weglassen und mit $\|w\|^2$ multiplizieren:

   $$\begin{aligned}
   0 &\leq \|v\|^2\|w\|^2 - 2|\langle w, v\rangle|^2 + |\langle w, v\rangle|^2 \\
   |\langle w, v\rangle|^2 &\leq \|v\|^2\|w\|^2
   \end{aligned}$$

   Mit $|\langle w, v\rangle| = |\langle v, w\rangle|$ gilt:

   $$|\langle v, w\rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|.$$

   c) Sei V ein euklidischer Vektorraum. Für $x, y \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

   $$0 \leq \|x\|^2 - 2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\|y\|^2$$

   Außerdem gilt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

   $$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

2. *Triangle inequality*

a) Sei V ein unitärer Vektorraum. Seien die Vektoren der Menge $M = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $v_i \in V\backslash\{0\}$, für $i = \{1, \ldots, n\}$ paarweise orthogonal, d.h.

$$\langle v_i, v_j \rangle = 0$$

für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $i \neq j$. Zu zeigen: $\{v_1, \ldots, v_n\}$ sind linear unabhängig.
Beweis durch Widerspruch:
Angenommen $\{v_1, \ldots, v_n\}$ sind linear abhängig. Dann gibt $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ mit

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$$

wobei mindestens ein $\alpha_i \neq 0$ gilt. Wir nehmen o.B.d.A. an, dass $\alpha_1 \neq 0$ ist. Dann lässt sich die Gleichung umformulieren zu

$$v_1 = -\frac{1}{\alpha_1}(\alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n).$$

Aus der paarweisen Orthogonalität folgt dann für alle $i \geq 2$

$$\begin{aligned} 0 = \langle v_i, v_1 \rangle &= \langle v_i, -\frac{1}{\alpha_1} \sum_{k=2}^{n} \alpha_k v_k \rangle = -\frac{1}{\alpha_1} \sum_{k=2}^{n} \alpha_k \langle v_i, v_k \rangle \\ &= -\frac{\alpha_i}{\alpha_1} \langle v_i, v_i \rangle \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch da mindestens ein weiteres $\alpha_i \neq 0$ gilt (sonst wäre $v_1 = 0$) und $\langle v_i, v_i \rangle \neq 0$ für $v_i \neq 0$.

b) Zu zeigen: $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ für alle $v, w \in V$
Beweis:
Wir betrachten wieder das Quadrat der Norm.

$$\begin{aligned} \|v + w\|^2 &= \langle v + w, v + w \rangle = \langle v, v \rangle + \langle v, w \rangle + \langle w, v \rangle + \langle w, w \rangle \\ &= \|v\|^2 + \|w\|^2 + \langle v, w \rangle + \overline{\langle v, w \rangle} = \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\mathrm{Re}(\langle v, w \rangle) \end{aligned}$$

Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung gilt

$$|\langle v, w \rangle|^2 = \mathrm{Re}^2(\langle v, w \rangle) + \mathrm{Im}^2(\langle v, w \rangle) \leq \|v\|^2 \cdot \|w\|^2.$$

Da $\mathrm{Im}^2(\langle v, w \rangle) \geq 0$ ist, folgt insbesondere $\mathrm{Re}^2(\langle v, w \rangle) \leq \|v\|^2 \cdot \|w\|^2$, d.h. $\mathrm{Re}(\langle v, w \rangle) \leq \|v\| \cdot \|w\|$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \|v + w\|^2 &= \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\mathrm{Re}(\langle v, w \rangle) \leq \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\|v\|\|w\| \\ &= (\|v\| + \|w\|)^2. \end{aligned}$$

Die Wurzel ziehen liefert das Ergebnis.