Musterlösung Blatt 1

April 21, 2016

1 Aufgabe 1 – Gaußsches Eliminationsverfahren

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -5 \\ 2 & -2 & 7 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.1 Schritt 1

Matrix A nach Skalierung, damit Pivot $= 1$ ist:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -5 \\ 2 & -2 & 7 \end{pmatrix}, \quad W_{11}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Elementarmatrix:

$$W_{21}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Elementarmatrix:

$$W_{31}(-2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplikation aller bisherigen Elementarmatrizen liefert

$$L = W_{31}(-2)W_{21}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Modifizierte Matrix LA und neue rechte Seite Lb:

$$LA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix}$$

1.2 Schritt 2

Matrix A nach Skalierung, damit Pivot $= 1$ ist:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}, \quad W_{22}(\frac{1}{4}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Elementarmatrix:

$$W_{32}(4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplikation aller bisherigen Elementarmatrizen liefert

$$L = W_{32}(4)W_{22}(1)W_{31}(-2)W_{21}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Modifizierte Matrix LA und neue rechte Seite Lb:

$$LA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{5}{2} \\ 5 \end{pmatrix}$$

2 Aufgabe 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 14 \\ 4 & 13 & 38 \end{pmatrix}$$

Die untere Dreiecksmatrix L kann durch invertieren der Elementarmatrizen erzeugt werden. Achtung: Beachten Sie die Reihenfolge beim multiplizieren!

2.1 Schritt 1

Matrix nach Umsortierung: $A_1 = AP$ (Keine Umsortierung, da das Diagonalelement nicht Null ist. Also ist P die Einheitsmatrix.)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 14 \\ 4 & 13 & 38 \end{pmatrix}$$

Skalierung, damit Pivot $= 1$ ist: $A1 = W_{11}(1)AP$ (keine Skalierung, da bereits gilt: Diagonalelement $= 1$)

$$W_{11}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrix nach Skalierung:

$$A_1 = W_{11}(1)AP = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 14 \\ 4 & 13 & 38 \end{pmatrix}$$

Elementarmatrix:

$$W_{21}(-3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und dazu inverse Elementarmatrix:

$$W_{21}(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Elementarmatrix:

$$W_{31}(-4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und dazu inverse Elementarmatrix:

$$W_{31}(4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Untere Dreiecksmatrix $L^{-1} = W_{31}(-4)W_{21}(-3)$ und Permutationsmatrix P nach Schritt 1:

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

invertierte Dreiecksmatrix

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Obere Dreiecksmatrix $R = L^{-1}AP$ nach Schritt 1:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 26 \end{pmatrix}$$

2.2 Schritt 2

Matrix nach Umsortierung: $A_1 = AP$ (keine Umsortierung, da das Diagonalelement nicht Null ist. Also ist P die Einheitsmatrix)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 26 \end{pmatrix}$$

Skalierung, damit Pivot $= 1$ ist: $A_2 = W_{22}(1)A_1P$ (keine Skalierung, da bereits gilt: Diagonalelement $= 1$)

$$W_{22}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrix nach Skalierung:

$$A_2 = W_{22}(1)A_1P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 26 \end{pmatrix}$$

Elementarmatrix:

$$W_{32}(-5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

und dazu inverse Elementarmatrix:

$$W_{32}(5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Untere Dreiecksmatrix $L^{-1} = W_{32}(-5)W_{31}(-4)W_{21}(-3)$ und Permutationsmatrix $P = \dots P_2P_1$ nach Schritt 2:

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 11 & -5 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

invertierte Dreiecksmatrix

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Obere Dreiecks-Matrix $R = L^{-1}AP$ nach Schritt 2:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.3 Aufgabenteil 2

$$A^{-1} = (LRP^{-1})^{-1} = PR^{-1}L^{-1} = \begin{pmatrix} 84 & -37 & 7 \\ -58 & 26 & -5 \\ 11 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

2.4 Aufgabenteil 2

Löse $Ax = b$ für

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mit der LR-Zerlegung haben wir: $AP = LR$ Lösung mit Rückwärts- und Vorwärtssubstitution: $Ax = b$ auf der linken Seite wird mit der Einheitsmatirx $E = PP^{-1}$ erweitert:

$$APP^{-1}x = LRP^{-1}x = b.$$

Wir substituieren $z = P^{-1}x$:

$$APz = LRz = b$$

und merken uns, dass $x = Pz$ ist. Wir betrachten nun die rechte Seite

$$LRz = b.$$

Substituiere weiter: $Rz = y$ und löse $Ly = b$ für b_1 und b_2 mit Vorwärtssubstitution

$$Ly_1 = b_1 \rightarrow y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

und

$$Ly_2 = b_2 \rightarrow y_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -25 \end{pmatrix}.$$

Löse dann für die gerade berechneten y_1 und y_2 das Gleichungssystem $Rz = y$ mit Rückwärtssubstitution:

$$Rz_1 = y_1 \rightarrow z_1 = \begin{pmatrix} 31 \\ -21 \\ 4 \end{pmatrix}$$

und

$$Rz_2 = y_2 \rightarrow z_2 = \begin{pmatrix} -188 \\ 131 \\ -25 \end{pmatrix}.$$

Umsortieren mit $x = Pz$ liefert

$$x_1 = \begin{pmatrix} 31 \\ -21 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x_1 = \begin{pmatrix} -188 \\ 131 \\ -25 \end{pmatrix}.$$

Der letzte Aufgabenteil kann selbstverständlich auch mit der inversen Matrix A^{-1} gelöst werden, also $x = A^{-1}b$.