

**LINEARE ALGEBRA I (LEHRAMT GYMNASIUM)**  
**WINTERSEMESTER 2015/16**

CAROLINE LASSER

INHALTSVERZEICHNIS

1. Matrizen	2
1.1. Eliminationsverfahren (13.04.)	2
2. Euklidische Vektorräume	3
2.1. Skalarprodukte und Normen (20.04.)	3
2.2. Orthonormalisierung (04.05.)	4
2.3. Lineare Abbildungen und Skalarprodukt (11.05.)	5
3. Determinanten	6
3.1. Determinanten und die Leibnizformel (18.05.)	6
3.2. Satz von Laplace (25.05.)	7
3.3. Parallelotope und Kreuzprodukt (01.06.)	8
4. Eigenwerte	9
4.1. Diagonalisierbarkeit (08.06.)	9
4.2. Trigonalisierung und Spektralsatz (15.06.)	10
4.3. Hauptachsentransformation & Singulärwertzerlegung (22.06.)	11
4.4. Satz von Cayley–Hamilton (29.06.)	12
4.5. Haupträume (06.07.)	13
4.6. Jordansche Normalform (13.07.)	14
Literatur	15

## 1. MATRIZEN

## 1.1. Eliminationsverfahren (13.04.)

- (1) Eliminationsmatrizen
- (2) Erweiterte Koeffizientenmatrix
- (3) Satz über Gauß'sche Elimination (ohne Beweis)
- (4) Beweis von „Zeilenrang gleich Spaltenrang“
- (5) LR-Zerlegung
- (6)  $2 \times 2$  Beispiel
- (7) Anwendungen der LR-Zerlegung
- (8) Invertierung einer oberen Dreiecksmatrix

1.1.1. *Literatur.* [DL, Kapitel 5.11 & 5.12]

## 2. EUKLIDISCHE VEKTORRÄUME

## 2.1. Skalarprodukte und Normen (20.04.)

- (1) Definition euklidischer Vektorraum
- (2) Beispiel  $\mathbb{R}^n$  mit zwei Skalarprodukten
- (3) Definition unitärer Vektorraum
- (4) Beispiel  $\mathbb{C}^n$  mit Standardskalarprodukt
- (5) Bemerkungen zur komplexen Konjugation
- (6) Definition Norm
- (7) Induzierte Norm
- (8)  $p$ -Normen,  $1 \leq p < \infty$
- (9) Definition Orthonormalbasis
- (10) Standardorthonormalbasis im  $\mathbb{C}^n$
- (11) Parseval-Gleichung
- (12) Koordinatenabbildung von Orthonormalbasis

2.1.1. *Literatur.* [DL, Kapitel 6.3–6.4 & 6.6]

**2.2. Orthonormalisierung (04.05.)**

- (1) Existenzbeweis von Orthonormalbasen im Endlichdimensionalen
- (2) Beispiel im  $\mathbb{R}^2$
- (3) Gram–Schmidt Verfahren
- (4) Beispiel im  $\mathbb{R}^3$
- (5) Definition orthogonale Summe
- (6) Eigenschaften der orthogonalen Summe
- (7) Definition orthogonales Komplement
- (8) Eigenschaften des orthogonalen Komplements
- (9) Definition orthogonale Projektion
- (10) Berechnungsformel

2.2.1. *Literatur.* [DL, Kapitel 6.7 & 6.8]

**2.3. Lineare Abbildungen und Skalarprodukt (11.05.)**

- (1) Definition orthogonale Abbildung und Matrix
- (2) Definition unitäre Matrix
- (3) Charakterisierung orthogonaler Matrizen (insb. Längen- und Winkeltreue)
- (4) Beispiel einer orthogonalen  $3 \times 3$  Matrix
- (5) Matrizen und Standardskalarprodukt
- (6) Rieszscher Darstellungssatz
- (7) Beispiel eines Riesz-Vektors im  $\mathbb{R}^n$
- (8) Riesz-Vektor und Kern
- (9) Bra-Ket

2.3.1. *Literatur.* [DL, Kapitel 6.9 & 6.10]

## 3. DETERMINANTEN

## 3.1. Determinanten und die Leibnizformel (18.05.)

- (1)  $2 \times 2$  Determinanten
- (2) Existenz- und Eindeigkeitssatz (ohne Beweis)
- (3)  $n \times n$  Beispiele
- (4) Definition Vorzeichenfunktion
- (5) Fehlstände
- (6) Beispiele von Permutationen
- (7) Leibniz-Formel
- (8) Regel von Sarrus
- (9) Beweis der Leibniz-Formel

3.1.1. *Literatur.* [DL, Kapitel 7.2–7.4]

**3.2. Satz von Laplace (25.05.)**

- (1) Multiplikationssatz
- (2) Transpositionssatz
- (3) Streich- und Überschreibmatrizen
- (4) Laplace'scher Entwicklungssatz
- (5)  $4 \times 4$  Beispiel
- (6) Beweis des Entwicklungssatzes
- (7) Komplementärmatrix
- (8) komplementäre und inverse Matrix
- (9) Cramer'sche Regel
- (10)  $2 \times 2$  Beispiel

3.2.1. *Literatur.* [DL, Kapitel 7.5–7.7]

**3.3. Parallelotope und Kreuzprodukt (01.06.)**

- (1) Definition Parallelotop
- (2) Rekursive Definition des Parallelotopvolumens
- (3) Satz über das Parallelotopvolumen
- (4) Parallelogrammfläche über die Gramsche Determinante
- (5) Definition Kreuzprodukt
- (6) Satz über Orthogonalität und Volumenformeln
- (7) Rechte-Hand-Regel
- (8) Transformationsformel
- (9) Orthogonale und spezielle orthogonale Gruppe

3.3.1. *Literatur.* [DL, Kapitel 7.8 –7.10]



## 4. EIGENWERTE

## 4.1. Diagonalisierbarkeit (08.06.)

- (1) Definition Eigenwert, Eigenvektor
- (2) Definition Spektrum, Eigenraum
- (3) Satz von der linearen Unabhängigkeit von Eigenvektoren
- (4) Definition diagonalisierbare Matrix
- (5) Charakterisierung der Diagonalisierbarkeit
- (6) Definition charakteristisches Polynom
- (7) Definition Spur
- (8) Definition algebraische und geometrische Vielfachheit
- (9) geometrische Vielfachheit kleiner gleich der algebraischen

4.1.1. *Literatur.* [DL, Kapitel 8.1–8.4]

**4.2. Trigonalisierung und Spektralsatz (15.06.)**

- (1) Charakterisierung der Diagonalisierbarkeit über Vielfachheiten
- (2) Diagonalisierbarkeit komplexer Matrizen
- (3) Schur-Zerlegung (ohne Beweis)
- (4) Spektralsatz für symmetrische Matrizen
- (5) Spektralsatz für hermitesche Matrizen

4.2.1. *Literatur.* [DL, Kapitel 8.5 & 8.6]

**4.3. Hauptachsentransformation & Singulärwertzerlegung (22.06.)**

- (1) Hauptachsentransformation (Orthonormalbasis)
- (2) Hauptachsentransformation (orthogonale Basis)
- (3) Charakterisierung symmetrisch positive definiten Matrizen
- (4) Rechteckige Diagonalmatrizen
- (5) Singulärwertzerlegung

4.3.1. *Literatur.* [DL, Kapitel 8.7–8.9]

**4.4. Satz von Cayley–Hamilton (29.06.)**

- (1) Ellipsen
- (2) Bild eines Kreises
- (3) charakteristisches Polynom als Matrixpolynom
- (4)  $p_A(A) = 0$  für diagonale Matrizen  $A$
- (5)  $p_A(A) = 0$  für diagonalisierbare Matrizen  $A$
- (6) Frobenius-Norm
- (7) Dichtheit diagonalisierbarer Matrizen
- (8) Satz von Cayley–Hamilton
- (9) Definition Minimalpolynom

4.4.1. *Literatur.* [DL, Kapitel 8.10 & Ausblick 4]

**4.5. Haupträume (06.07.)**

- (1) Das Ideal  $I_A$
- (2) Existenz und Eindeutigkeit des Minimalpolynoms
- (3) Nullstellen des Minimalpolynoms
- (4) Linearfaktoren des Minimalpolynoms
- (5) Diagonalisierbarkeitskriterium
- (6) Definition Hauptraum und Index
- (7) Fitting-Zerlegung

4.5.1. *Literatur.* [DL, Kapitel 8.11]

**4.6. Jordansche Normalform (13.07.)**

- (1) Definition nilpotente Matrix
- (2) Eigenschaften nilpotenter Matrizen
- (3) Dimension des Hauptraums
- (4) Index und Minimalpolynom (ohne Beweis)
- (5) Hauptraumzerlegung
- (6) Jordansche Normalform
- (7) Beispiel einer Jordan-Kette

4.6.1. *Literatur.* [DL, Kapitel 8.12]

LITERATUR

- [DL] O. Deiser, C. Lasser: Erste Hilfe in Linearer Algebra, Springer-Verlag, 2015.