Caroline Lasser, Karin Tichmann, Stephanie Troppmann

Übung zu Eigenwerten

1. *Eigenwerte und Eigenvektoren*

   a) Bestimmen Sie für die Dreiecksmatrix

   $$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

   die Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$. Skizzieren Sie die Vektoren v_1, v_2 und Av_1, Av_2.

   b) Bestimmen Sie für die Drehmatrix

   $$A_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

   die Eigenwerte und zugehörigen Eigenräume in Abhängigkeit vom Drehwinkel $\varphi \in [0, 2\pi)$.

   c) Bestimmen Sie für die Matrix

   $$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

   die Eigenwerte und eine Eigenbasis (v_1, v_2). Bilden Sie aus der Eigenbasis eine Matrix und überprüfen Sie, ob diese B tatsächlich diagonalisiert.

2. *Characteristic polynomial*
   Let $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

   a) Determine the characteristic polynomial of A by an explicit calculation.

   b) Derive criteria for the number of distinct eigenvalues of A from the discriminant

   $$d = \operatorname{tr}(A)^2 - 4\det(A).$$

   c) Determine the characteristic polynomial and the eigenvalues of

   $$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

   Check your discriminant criterion for this example.

   d) Let $S \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$. Prove that A and $B = SAS^{-1}$ have the same characteristic polynomial.