Caroline Lasser, Karin Tichmann, Stephanie Troppmann

Übung zu Determinanten

1. *Übung: Flächen*

   a) Betrachten Sie die Matrizen

   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

   Die Spalten der Matrizen A und BA definieren jeweils ein Dreieck. Zeichnen Sie die beiden Dreiecke, bestimmen Sie ihre Flächen und setzen Sie den Flächenquotient mit $\det(B)$ in Beziehung.

   b) Betrachten Sie die Matrizen

   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 4} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

   Die Spalten der Matrizen A und BA definieren jeweils ein Parallelogramm. Zeichnen Sie die beiden Parallelogramme, bestimmen Sie ihre Flächen und setzen Sie den Flächeninhalt mit $\det(B)$ in Beziehung.

2. *Invertible matrices*

   a) Consider $a, b, c, d \in K$ and

   $$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K^{2\times 2}.$$

   Assume $A \in \mathrm{GL}(2, K)$ and derive an explicit formula for A^{-1}. Prove that $A \in \mathrm{GL}(2, K)$ if and only if $\det(A) \neq 0$.

   b) Use the three defining properties of the determinant function and prove that $A \in \mathrm{GL}(n, k)$ if and only if $\det(A) \neq 0$.