

Übung zu orthogonalen Matrizen

1. Orthogonale Matrizen

Betrachten Sie

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- Berechnen Sie $\|x\|$ und $\|Qx\|$ bezüglich der euklidischen Norm. Zeichnen Sie x und Qx .
- Schreiben Sie die Spaltenvektoren von Q in Polarkoordinaten und interpretieren Sie Qx geometrisch.
- Bestimmen Sie alle orthogonalen 2×2 Matrizen.

2. Unitary matrices

Consider $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ and the standard scalarproduct $\langle v, w \rangle = v^*w$ on \mathbb{C}^n . Prove that the following are equivalent:

- $\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle$ for all $x, y \in \mathbb{C}^n$.
- $\|Ux\| = \|x\|$ for all $x \in \mathbb{C}^n$.
- The columns of U are an orthonormal basis of \mathbb{C}^n .
- U is invertible with $U^{-1} = U^*$.