Caroline Lasser, Karin Tichmann, Stephanie Troppmann

Übung zu Orthonomalisierung

1. *Gram–Schmidt Verfahren*

   a) Verwandeln Sie die Vektoren
   $$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
   in eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^2$ bezüglich des Standardskalarprodukts.

   b) Verwandeln Sie die Vektoren
   $$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
   in eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^2$ bezüglich des gewichteten Skalarprodukts $\langle v, w\rangle = v^t Dw$, $v, w \in \mathbb{R}^2$, mit $D = \mathrm{diag}(2, 1)$.

   c) Verwandeln Sie Vektoren
   $$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
   in eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ bezüglich des Standardskalarprodukts.

2. *Best approximation*
   Let V be an euclidean or unitary vector space, $U \subseteq V$ a subspace of V, and P_U the orthogonal projection onto U.

   a) Prove that
   $$\|v - u\|^2 = \|P_U(v) - u\|^2 + \|v - P_U(v)\|^2, \qquad v \in V,\ u \in U.$$

   b) Prove that
   $$\|P_U(v) - v\| = \min_{u\in U} \|u - v\|, \qquad v \in V.$$

   c) Draw an illustrative figure in $\mathbb{R}^2$.