Caroline Lasser, Karin Tichmann, Stephanie Troppmann

Übung zu Skalarprodukten und Normen - Teil 2

1. *Orthogonalität im $\mathbb{R}^2$*
   Betrachten Sie den Vektorraum $\mathbb{R}^2$ mit dem (kanonischen) Standardskalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
   a) Zeigen Sie
   $$\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} \rangle = 0$$
   für $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ und fertigen Sie eine beschriftete Skizze an.
   b) Zeigen Sie
   $$\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \rangle = 0$$
   für $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ und fertigen Sie eine beschriftete Skizze an.
   c) Zeigen Sie
   $$\langle \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ -\cos\alpha \end{pmatrix} \rangle = 0$$
   für $\alpha \in [0, 2\pi[$ und fertigen Sie eine beschriftete Skizze an.
   d) Sei (v_1, v_2) eine Orthonormalbasis. Zeigen Sie die Existenz von $\alpha \in [0, 2\pi[$ so dass
   $$v_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

2. *Maximum norm*
   For $x \in \mathbb{R}^n$ define $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$.
   a) Prove that $\|\cdot\|_\infty$ is a norm.
   b) Prove that
   $$\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \|x\|_1 \le \sqrt{n}\|x\|_2 \le n\|x\|_\infty, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$
   c) Sketch the unit spheres $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_p = 1\}$ for $p = 1, 2, \infty$.