

Übung zu Skalarprodukten und Normen

1. Cauchy–Schwarz Ungleichung

Sei V ein unitärer Vektorraum. Zeigen Sie:

a) Für $v, w \in V$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt:

$$0 \leq \|v\|^2 - 2\operatorname{Re}(\lambda\langle v, w \rangle) + |\lambda|^2\|w\|^2.$$

b) Für $v, w \in V$ gilt:

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\|\|w\|.$$

(Hinweis: Verwenden Sie $\lambda = \langle w, v \rangle / \|w\|^2$.)

c) Formulieren Sie die beiden Ungleichungen im euklidischen Vektorraum.

2. Triangle inequality

Let V be a unitary vector space.

a) Prove that n pairwise orthogonal vectors are linearly independent.

b) Prove that the Cauchy–Schwarz inequality implies the triangle inequality.

c) Draw a geometric sketch explaining the triangle inequality in \mathbb{R}^2 .