Caroline Lasser, Karin Tichmann, Stephanie Troppmann

Übung zu Minimalpolynomen

1. *Satz von Cayley–Hamilton*

   a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom p_A von
   $$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$
   und überprüfen Sie durch eine explizite Rechnung $p_A(A) = 0$.

   b) Bestimmen Sie A^2 ohne explizite Berechnung aus $p_A(A) = 0$.

   c) Bestimmen Sie A^{-1} ohne explizite Berechnung aus $p_A(A) = 0$.

2. *Minimal polynomial*

   a) Compute for
   $$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \qquad a, b, c \in \mathbb{R},$$
   the powers A^2 and A^3. What do you observe for A^k with $k \geq 4$?

   b) Let $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ such that $A^k = 0$ for some $k \geq 1$. Let $r \geq 1$ be minimal with $A^r = 0$. Prove that
   $$m_A(x) = x^r, \qquad p_A(x) = (-1)^n x^n, \qquad \sigma(A) = \{0\}.$$

   c) Let $A \in K^{n\times n}$ be such that $A^2 = A$. Prove that $m_A(x)$ equals
   $$x, \quad x - 1, \quad \text{or} \quad x^2 - x.$$