# Übung zu Hauptachsentransformation & Singulärwertzerlegung

1. *Orthogonale* $2 \times 2$ *Matrizen*

   a) Zeigen Sie, dass es für jeden Vektor $x \in \mathbb{R}^2$ mit $\|x\| = 1$ genau einen Winkel $\alpha \in [0, 2\pi)$ gibt, so dass
   $$x = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}.$$

   b) Bestimmen Sie für einen Vektor $x \in \mathbb{R}^2$ die beiden normierten Vektoren, die auf $x$ senkrecht stehen. Skizzieren Sie die beiden Vektoren.

   c) Begründen Sie, dass es für eine orthogonale $2 \times 2$ Matrix $Q \in O(2)$ genau einen Winkel $\alpha \in [0, 2\pi)$ gibt, so dass
   $$Q = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad Q = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

   d) Bestimmen und skizzieren Sie für $Q \in O(2)$ die Vektoren $Qe_1$ und $Qe_2$ in den beiden in c) begründeten Fällen.

   e) Beschreiben Sie die Wirkung von $Q \in O(2)$ geometrisch.

   f) Bestimmen Sie ohne Rechnung die Eigenwerte und Eigenvektoren einer orthogonalen Matrix $Q \in O(2)$.

2. *Rank*
   Let $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$.

   a) Prove that $\ker(A) = \ker(A^*A)$.

   b) Prove that $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A^*A)$.

   c) Prove that $\operatorname{rank}(A)$ equals the number of the nonzero singular values of $A$.