

Übung zum Spektralsatz

1. Schurzerlegung

Betrachten Sie die reelle 3×3 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

- Bestimmen Sie für A das charakteristische Polynom, das Spektrum, sowie die algebraische und die geometrische Vielfachheit der Eigenwerte.
- Ist A diagonalisierbar?
- Bestimmen Sie für A eine Schur-Zerlegung.

2. Spectral theorem

Consider the real 2×2 matrix

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in [0, 2\pi).$$

- Prove that A_α is a symmetric and orthogonal matrix. Determine its characteristic polynomial and its spectrum.
- Describe the action of A_α von vectors $v \in \mathbb{R}^2$ geometrically and draw a corresponding figure.
- Use b) to determine an orthonormal eigenbasis of A_α and check your result by a direct computation.
- Determine an orthogonal matrix that diagonalizes A_α .
- Write an arbitrary symmetric matrix $B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ as

$$B = bE_2 + A_\alpha$$

for suitable $b \in \mathbb{R}$ and $\alpha \in [0, 2\pi)$. Determine an orthogonal matrix that diagonalizes B .