10 BEWEISE DER LINEAREN ALGEBRA I

CAROLINE LASSER

Die folgenden 10 Aufgaben sind als einfaches Beweistraining gedacht. Sie orientieren sich am Stoff der Linearen Algebra I.

Seien V und W endlich-dimensionale K-Vektorräume, $f, g : V \to W$ lineare Abbildungen, $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V, $w \in W$ und $A \in K^{m \times n}$.

Zeigen Sie:

(1) $\mathbb{R}$ ist als $\mathbb{Q}$-Vektorraum unendlich-dimensional.
(2) $f(0) = 0$.
(3) f ist genau dann injektiv, wenn $\mathrm{Kern}(f) = \{0\}$ gilt.
(4) Die Koordinatenabbildung bezüglich $\mathcal{A}$ ist ein Isomoprhismus.
(5) Ist $f(v) = g(v)$ für alle $v \in \mathcal{A}$, so gilt $f = g$.
(6) $L_f(w)$ ist ein affiner Unterraum von V.
(7) Für Diagonalmatrizen $D_l \in K^{m \times m}$ und $D_r \in K^{n \times n}$ gilt: $D_l A$ und AD_r gehen aus A durch Zeilen- bzw. Spaltenskalierung hervor.
(8) $\mathrm{rang}(A) \leq \min(m, n)$.
(9) Äquivalente Matrizen haben gleichen Rang.
(10) Für $A \in \mathrm{GL}(n, K)$ gilt $A^t \in \mathrm{GL}(n, K)$ und $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

Date: 15. April 2016.