C. Pötzsche
F. Marquardt
Zentrum Mathematik
TU München

26. Juli 2011

Lineare Algebra für Informatik

Lösungsvorschlag zum 9. Übungsblatt

Aufgabe 1

(a) Vertauschen zweier Zeilen: Mit dem Entwicklungssatz läßt sich jede dieser Vertauschungsmatrizen auf die Form $\det A_{kl} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1$ reduzieren.

(b) Addition zweier Zeilen: Die Additionsmatrix ist eine Einheitsmatrix mit einer zusätzlichen Eins. Die Determinante läßt sich daher als Produkt der Diagonaleelemente berechnen mit $\det A^+_{kl} = 1$.

(c) Multiplikation einer Zeile mit $\alpha \in \mathbb{K}$: Die Multiplikationsmatrix ist eine Einheitsmatrix, bei der an der Stelle k α anstelle von Eins steht. Demnach ist die Determinante $\det A_{\alpha k} = \alpha$.

Aufgabe 2

Wir setzen $1 \widehat{=} (1,0,0,0), x \widehat{=} (0,1,0,0), x^2 \widehat{=} (0,0,1,0)$ und $x^3 \widehat{=} (0,0,0,1)$. Dann ist die Differentiationsabbildung in $P_3(\mathbb{R})$ gegeben durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Der Basiswechsel läßt sich mit der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}, B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.75 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.125 \end{pmatrix}$$

beschreiben. Damit ergibt sich die Differentationsabbildung in der Hermitebasis als

$$A' = B^{-1}AB = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3

$$\det\begin{pmatrix}5 & 9\\ 4 & 10\end{pmatrix} = 5\cdot 10 - 9\cdot 4 = 14,$$
$$\det\begin{pmatrix}6 & 1 & 16\\ 4 & 2 & 9\\ 6 & 16 & 1\end{pmatrix} = (6\cdot 2\cdot 1 + 1\cdot 9\cdot 6 + 16\cdot 4\cdot 16) - (6\cdot 9\cdot 16 + 1\cdot 4\cdot 1 + 16\cdot 2\cdot 6) = 30,$$
$$\det\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 2 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix} = 0, II = (I - III)/2,$$
$$\det\begin{pmatrix}5 & 4 & 2 & 6\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 2 & 3 & 0 & 5\\ 1 & 4 & 0 & 4\end{pmatrix} = (-1)\cdot(-1)\det\begin{pmatrix}5 & 4 & 6\\ 2 & 3 & 5\\ 1 & 4 & 4\end{pmatrix}$$
$$= (5\cdot 3\cdot 4 + 4\cdot 5\cdot 1 + 6\cdot 2\cdot 4) - (5\cdot 5\cdot 4 + 4\cdot 2\cdot 4 + 6\cdot 3\cdot 1) = -22.$$

Aufgabe 4

Das invertieren einer Matrix mit Hilfe der Adjunkten ist für grössere Matrizen sehr viel aufwändiger als mit dem Gaußschen Algorithmus.