C. Pötzsche
F. Marquardt
Zentrum Mathematik
TU München

13. Juli 2011

Lineare Algebra für Informatik

Lösungsvorschlag zum 8. Übungsblatt

Aufgabe 1

(a) Die Menge der invertierbaren Matrizen ist eine Gruppe.

(b) **Beh.:** Für jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gilt die Inklusion (a) $T_A \in GL(\mathbb{K}^n) \Rightarrow$ (b) A ist regulär.

Bew.: $(a) \Rightarrow (b)$ Wegen der Invertierbarkeit von T_A ist $\dim R(T_A) = n$ und folglich gilt nach Satz 3.3.8, dass $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} T_A = \dim R(T_A) = n$.

(c) **Beh.:** Es sei $b \in \mathbb{K}^m$. Eine lineare inhomogene Gleichung (L_b) hat genau dann eine Lösung, wenn für die augmentierte Koeffizientenmatrix gilt

$$\operatorname{rk} A = \operatorname{rk}(A, b).$$

Bew.: Mit beliebigem $b \in \mathbb{K}^m$ gilt:

$(\Rightarrow)$ Ist (L_b) lösbar, so ist b eine Linearkombination der Spalten von A, so dass die Spaltenräume der Matrizen A und (A, b) übereinstimmen. Mit Bem. 3.3.9 folgt dann die Behauptung.

$(\Leftarrow)$ Da der Spaltenraum von A im Spaltenraum von (A, b) enthalten ist, muss dann b wegen $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk}(A, b)$ im Spaltenraum von A liegen. Also ist b eine Linearkombination der Spalten von A und es existiert eine Lösung von (L_b).

Aufgabe 2

$$T' : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad T'x := \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \\ -x_1 + x_2 \end{pmatrix},$$

$$T' : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad T'x := \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \end{pmatrix},$$

$$T' : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2, \qquad T'x := \begin{pmatrix} -3x_1 + x_2 \\ 4x_1 - x_2 \end{pmatrix},$$

$$T' : C^1([0,1],\mathbb{R}) \to C([0,1],\mathbb{R}), \qquad (T'\phi)(t) := \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\phi(t) \quad \text{für alle } t \in [0,1]$$

Aufgabe 3

(a) Die Matrix zur Vertauschung der Zeilen k und $l \neq k$ ist $A_{kl} = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ mit $a_{ij} = \begin{cases} 1, (i = j \wedge i \neq k) \vee (i = k \wedge j = l) \vee (i = l \wedge j = k), \\ 0, \text{ sonst.} \end{cases}$ Die dazu inverse Matrix ist tauscht die Zeilen wieder zurück.

(b) Die Addition der Zeilen k und $l \neq k$ läßt sich realisieren mit der Matrix $A^+_{kl} = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ mit $a_{ij} = \begin{cases} 1, (i = j) \vee (i = k \wedge j = l), \\ 0, \text{ sonst} \end{cases}$ Die dazu inverse Matrix lautet $(A^+_{kl})^{-1} = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ mit $a_{ij} = \begin{cases} 1, i = j, \\ -1, i = k \wedge j = l, \\ 0, \text{ sonst} \end{cases}$ und bewirkt eine Subtraktion der l-ten Zeile von der k-ten.

(c) Die Multiplikation der Zeile k mit $\alpha \in \mathbb{K}$ geschieht durch die Matrix $A_{\alpha k} = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \wedge i \neq k, \\ \alpha, i = j \wedge i = k, \\ 0, \text{ sonst.} \end{cases}$$

Die Inverse ist wieder eine Multiplikationsmatrix mit dem Faktor $\frac{1}{\alpha}$.

Aufgabe 4

Vor.: Die Abbildung $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ überführe die Vektoren

$$a := \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, b := \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, c := \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

in $b, -a, c$.

Lös.: Diese Aufgabe läßt sich auf zwei Wegen lösen.

(a) Bei dem ersten Weg suchen wir eine Matrix $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3}$, so dass $Aa = b, Ab = -a, Ac = c$. Das entspricht den Gleichungen

$$6a_{11} + 3a_{12} - 2a_{13} = -2 \quad -2a_{11} + 6a_{12} + 3a_{13} = -6 \quad 3a_{11} - 2a_{12} + 6a_{13} = 3$$

$$\begin{array}{lll} 6a_{21}+3a_{22}-2a_{23}=6 & -2a_{21}+6a_{22}+3a_{23}=-3 & 3a_{21}-2a_{22}+6a_{23}=-2 \\ 6a_{31}+3a_{32}-2a_{33}=3 & -2a_{31}+6a_{32}+3a_{33}=2 & 3a_{31}-2a_{32}+6a_{33}=6. \end{array}$$

Diese Gleichungen sortieren wir nach den Indizes und erhalten die drei Gleichungssysteme

$$\begin{array}{rrr} 6a_{11}+3a_{12}-2a_{13}=-2 & 6a_{21}+3a_{22}-2a_{23}=6 & 6a_{31}+3a_{32}-2a_{33}=3 \\ -2a_{11}+6a_{12}+3a_{13}=-6 & -2a_{21}+6a_{22}+3a_{23}=-3 & -2a_{31}+6a_{32}+3a_{33}=2 \\ 3a_{11}-2a_{12}+6a_{13}=3 & 3a_{21}-2a_{22}+6a_{23}=-2 & 3a_{31}-2a_{32}+6a_{33}=6. \end{array}$$

Durch Lösen dieser Systeme erhält man die Abbildungsmatrix

$$A=\frac{1}{49}\begin{pmatrix} 9 & -48 & 4 \\ 36 & 4 & -33 \\ 32 & 9 & 36 \end{pmatrix}.$$

(b) Der zweite Weg benutzt den Basiswechselsatz.

Die Zuordnung $a,b,c \mapsto b,-a,c$ läßt sich über der Basis a,b,c darstellen mit der Matrix $A'=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Der Basiswechsel von der kanonischen Basis ist gegeben durch die Matrix $B=\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 3 & 6 & -2 \\ -2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$. Nach dem Basiswechselsatz gilt für die Abbildungsmatrix A in der kanonischen Basis

$$A'=B^{-1}AB \Leftrightarrow BA'B^{-1}=A.$$

Wir müssen also die Matrix B einmal invertieren und die Matrixmultiplikationen durchführen.