C. Pötzsche
F. Marquardt
Zentrum Mathematik
TU München

3. Juli 2011

Lineare Algebra für Informatik

Lösungsvorschlag zum 7. Übungsblatt

Aufgabe 1

Vor.: Die Abbildung $S : F(\mathbb{I}, X) \to F(\mathbb{I}, X)$ mit $(S\phi)_k := \phi_{k+1}$ bezeichne den Vorwärts-Shiftoperator.
Beh.: Für $\mathbb{I} = \mathbb{N}_0$ ist der Kern der Abbildung S die Menge $\{\phi_k = 0, k > 0\}$ und das Bild die Menge $F(\mathbb{N}_0, X)$. Das heißt, S ist surjektiv, aber nicht injektiv.
Bew.: Der Kern einer Abbildung ist gemäß Definition 3.1.8 mit $T = S$ die Menge $N(S) = \{\phi \in F(\mathbb{N}_0, X) : S\phi = 0\}$.

$$(S\phi)_k = \phi_{k+1} = 0 \quad \forall k \geq 0 \Leftrightarrow \phi_k = 0 \quad \forall k > 0.$$

Da diese Menge mehr als nur den Nullvektor beinhaltet ist S also nicht injektiv.
Desweiteren läßt sich zu jedem Element $\phi = (\phi_k)_{k\leq 0} \in F(\mathbb{N}_0, X)$ ein Urbild, zum Beispiel $\bar{\phi} = (\bar{\phi}_k)_{k\geq 0}$ mit $\bar{\phi}_0 = 0$ und $\bar{\phi}_k = \phi_k$ für alle $k > 0$, konstruieren. Daher ist S surjektiv.
Beh.: Für $\mathbb{I} = \mathbb{Z}$ ist der Kern der Abbildung S die Menge $\{\phi_k = 0\}$ und das Bild die Menge $F(\mathbb{Z}, X)$. Das heißt, S ist bijektiv.
Bew.: Der Kern einer Abbildung ist gemäß Definition 3.1.8 mit $T = S$ die Menge $N(S) = \{\phi \in F(\mathbb{Z}, X) : S\phi = 0\}$.

$$(S\phi)_k = \phi_{k+1} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \phi_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Der Kern enthält demnach nur den Nullvektor und S ist also injektiv.
Desweiteren ist jedes Element $S\phi \in F(\mathbb{Z}, X)$. Daher ist S surjektiv und insgesamt bijektiv.

Aufgabe 2

Vor.: $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$
Beh.: Der Vektor x ist eine Basis vom Kern von T_A. Die Vektoren y und z bilden eine Basis des Bildes von T_A.

$$x := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, y := \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}, z := \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Bew.: Der Kern der Abbildung T_A sind alle $x \in \mathbb{R}^3$, die Lösung des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$ sind.
Das Gauß-Verfahren liefert

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 \\ 10 & 11 & 12 & 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 12 & 0 \\ 0 & 9 & 18 & 0 \end{array}$$

mit $x_3 = t \in \mathbb{R}$ den Lösungsraum

$$L_0 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Das Bild der Abbildung T_A wird von den Spaltenvektoren der Matrix A aufgespannt. Man sieht leicht, dass die erste Spalte (y) und zweite Spalte (z) linear unabhängig sind. Die dritte Spalte läßt sich durch $2z - y$ ausdrücken und ist somit linear abhängig.

Aufgabe 3

(a) **Vor.:** $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Beh.: f ist ein Isomorphismus.

Bew.: f ist linear:

$$\begin{aligned} f\left(\alpha_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) &= (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \alpha_1 x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_1 y_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 y_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \alpha_1 f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right) + \alpha_2 f\left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

f ist surjektiv: Die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind unabhängig und spannen den Raum $\mathbb{R}^2$ auf.

Demnach bildet f den zweidimensionalen Raum $\mathbb{R}^2$ auf $\mathbb{R}^2$ ab und ist nach Satz 3.1.10 somit ein Isomorphismus.

(b) **Vor.:** $g : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ mit $g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = x \begin{pmatrix} 1 \\ \imath \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -\imath \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Beh.: g ist kein Isomorphismus.

Bew.: Man rechnet leicht nach, dass der Vektor

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \imath \\ -1 \end{pmatrix} \neq 0$$

auf Null abgebildet wird. Somit ist g nicht injektiv und gemäß der Definition 3.2.1 kein Isomorphismus.

(c) **Vor.:** $\bar{\cdot} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $z = a + \imath b \mapsto \bar{z} = a - \imath b$.

Beh.: Das Konjugieren einer komplexen Zahl ist ein Isomorphismus von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Bew.: $\bar{\cdot}$ ist linear: Es seien $x = a + \imath b$, $y = c + \imath d$ und $\alpha_1, \alpha_1 \in \mathbb{R}$ dann gilt

$$\begin{aligned} \overline{\alpha_1 x + \alpha_2 y} &= \overline{\alpha_1(a + \imath b) + \alpha_2(c + \imath d)} = \overline{(\alpha_1 a + \alpha_2 c) + \imath(\alpha_1 b + \alpha_2 d)} \\ &= (\alpha_1 a + \alpha_2 c) - \imath(\alpha_1 b + \alpha_2 d) = \alpha_1(a - \imath b) + \alpha_2(c - \imath d) = \alpha_1 \bar{x} + \alpha_2 \bar{y} \end{aligned}$$

$\bar{\cdot}$ ist injektiv: Sei $z = a + \imath b \in \mathbb{C}$.

$$\bar{z} = \overline{a + \imath b} = a - \imath b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \wedge b = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

Das heißt, der Kern von $\bar{\cdot}$ enthält nur die 0. Somit ist $\bar{\cdot}$ injektiv.

Offensichtlich ist $\bar{\cdot}$ auch surjektiv und somit bijektiv. Demnach ist das Konjugieren einer komplexen Zahl ist ein Isomorphismus von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$.

(d) **Vor.:** $|\cdot| : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$.

Beh.: Die Betragsfunktion ist kein Isomorphismus von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{N}$.

Bew.: Man sieht anhand des folgenden Beispiels, dass die Betragsfuntion nicht linear ist.

$$|3 + (-2)| = |1| = 1 \neq 5 = |3| + |-2|$$

<u>Aufgabe 4</u>

Vor.: X und Y seien lineare Räume.
Beh.: Durch $A := \{(X, Y) : X \text{ und } Y \text{ sind isomorph}\}$ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller linearen Räume definiert.
Bew.:

(a) reflexiv: X ist zu sich selbst isomorph. Der dazugehörige Isomorphismus ist die identische Abbildung. Also ist die Relation A reflexiv.

(b) symmetrisch: Es sei X isomporh zu Y, das heißt, es existiert ein Isomorphismus $T : X \to Y$. Als Isomorphismus ist T bijektiv, demnach existiert eine Umkehrabbildung $T^{-1} : Y \to X$, die Ihrerseits einen Isomorphismus darstellt. Somit ist Y isomorph zu X und A symmetrisch.

(c) transitiv: Es sei X isomporh zu Y und Y isomorph zu Z. Damit existieren Isomorphismen $T : X \to Y$ und $S : Y \to Z$. Demnach ist zu zeigen, dass die Verknüpfung $S \circ T : X \to Z$ wieder einen Isomorphismus darstellt.

$S \circ T$ ist linear, denn für $x_1, x_2 \in X$ ist $T(x_1), T(x_2) \in Y$ und es gilt, wegen der Linearität von T und S

$$S \circ T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = S(\alpha_1 T(x_1) + \alpha_2 T(x_2)) = \alpha_1 S(T(x_1)) + \alpha_2 S(T(x_2)).$$

$S \circ T$ ist injektiv, da $0_Z \in X$ vermittels S das eindeutige Urbild $0_Y \in Y$, für das wiederum $T(0_X) = 0_Y$ gilt. Die Surjektivität von $S \circ T$ folgt ebenso aus der Surjektivität von T und S.

Also ist X isomorph zu Z und A demnach transitiv.