C. Pötzsche
F. Marquardt
Zentrum Mathematik
TU München

11. Mai 2011

Lineare Algebra für Informatik

Lösungsvorschlag zum 6. Übungsblatt

Aufgabe 1

(a) **Vor.:** $\mathcal{S}_1 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Beh.: $\mathcal{S}_1$ ist linear abhängig in $\mathbb{R}^4$!

Bew.: Nach dem in der Vorlesung beschriebenen Verfahren zum Nachweis linearer Unabhängigkeit betrachten wir die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & 11 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = (a_1, a_2, a_3)$$

mit den Spalten $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Die assoziierte homogene Gleichung $Ax = 0$ in $\mathbb{R}^3$ besitzt nach dem Gauß-Verfahren die Lösungsmenge

$$L_0 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

d.h. die Spalten von A erfüllen $a_2 = 2a_1 - 3a_3$. Dies liefert die Behauptung.

Man rechnet leicht nach, dass etwa die beiden Spalten a_1, a_3 von A linear unabhängig in $\mathbb{R}^4$ sind. Da nun a_2 eine Linearkombination von a_1, a_3 ist, folgt nach Korollar 2.3.5 die Beziehung

$$\operatorname{span}\{a_1, a_3\} = \operatorname{span}\{a_1, a_2, a_3\} = \operatorname{span} \mathcal{S}_1.$$

Weiter gilt daher $\dim \operatorname{span} \mathcal{S}_1 = 2$ und die linear unabhängige Menge $\{a_1, a_3\}$ ist nach Korollar 2.4.15(d) eine Basis von $\operatorname{span} \mathcal{S}_1$.

(b) **Vor.:** $\mathcal{S}_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Beh.: Die Familie $\mathcal{S} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \cup \mathcal{S}_2$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^4$!

Bew.: Wir definieren die aus den Elementen von $\mathcal{S}$ gebildete obere Dreiecks-Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und verifizieren ohne Probleme, dass die assozierte lineare Gleichung $Ax = 0$ nur die triviale Lösung besitzt. Also besteht $\mathcal{S}$ aus vier linear unabhängigen Vektoren. Wiederum Korollar 2.4.15(d) garantiert, dass $\mathcal{S}$ dann eine Basis von $\mathbb{R}^4$ ist.

Aufgabe 2

Im Folgenden geben wir eine Basis der betreffenden Räume an und überlassen — zumindest in den ersten beiden Beispielen — dem interessierten Leser den konkreten Nachweis, dass es sich etwa um maximale linear unabhängige Mengen (vgl. Satz 2.4.6) handelt.

- Der lineare Raum $\mathbb{K}^{m\times n}$ aller Matrizen besitzt die Basis $\mathcal{S} := \{E_{kl}\}_{1\le k\le m, 1\le l\le n}$ mit

  $$E_{kl} := (e_{ij})_{1\le i\le m, 1\le j\le n}, \qquad e_{ij} := \begin{cases} 1, & k = i,\ l = j, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

  für alle $1 \le k \le m$ und $1 \le j \le n$. Die Menge $\mathcal{S}$ hat mn Elemente und folglich ist $\dim \mathcal{S} = mn$.

- Mit den oben eingeführten Matrizen $E_{kl} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ besitzt der lineare Raum $\Delta := \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} : A \text{ ist obere Dreiecks-Matrix}\}$ die Basis $\{E_{kl}\}_{1\le k\le l\le n}$. Die Anzahl von deren Elementen ergibt sich zu $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ und wir erhalten $\dim \Delta = \frac{n(n+1)}{2}$.

- Der Raum $F(\{1,\ldots,n\}, \mathbb{R})$ aller Funktionen $f : \{1,\ldots,n\} \to \mathbb{R}$ besitzt die Basis $\mathcal{S} := \{\phi_1,\ldots,\phi_n\}$ mit den Funktionen $\phi_1,\ldots,\phi_n : \{1,\ldots,n\} \to \mathbb{R}$,

  $$\phi_i(j) := \delta_{ij} \quad \text{für alle } 1 \le i \le n.$$

  In der Tat ist $\mathcal{S}$ linear unabhängig: Dazu gelte die Darstellung

  $$\sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i = 0 \in F(\{1,\ldots,n\}, \mathbb{R}) \quad \text{mit } \alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \mathbb{R},$$

  bzw. in äquivalenter Formulierung

  $$0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i(j) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{ij} = \alpha_j \quad \text{für alle } j \in \{1,\ldots,n\}$$

und somit verschwinden alle Koeffizienten $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Ferner besitzt eine beliebige Funktion $f \in F(\{1, \ldots, n\}, \mathbb{R})$ die Darstellung

$$f = \sum_{i=1}^{n} f(i)\phi_i,$$

womit $\mathcal{S}$ ein linear unabhängiges Erzeugendensystem, also eine Basis ist.

Aufgabe 3

Vor.: $\Pi_n(\mathbb{R}) := \{p \in P_n(\mathbb{R}) : p(0) = p'(1) = 0\}$ für ein $n \geq 0$
Beh.: $P_n(\mathbb{R})$ ist ein Unterraum von $P_n(\mathbb{R})$!
Bew.: Offenbar ist $\Pi_n(\mathbb{R}) \subseteq P_n(\mathbb{R})$. Für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und Polynome $p, q \in \Pi_n(\mathbb{R})$ gilt dann $\alpha p + \beta q \in P_n(\mathbb{R})$ und darüber hinaus

$$\begin{aligned}(\alpha p + \beta q)(0) &= \alpha p(0) + \beta q(0) = \alpha 0 + \beta 0 = 0, \\ (\alpha p + \beta q)'(0) &= \alpha p'(0) + \beta q'(0) = \alpha 0 + \beta 0 = 0;\end{aligned}$$

dies impliziert die Inklusion $\alpha p + \beta q \in \Pi_n(\mathbb{R})$ und $\Pi_n(\mathbb{R})$ ist ein Unterraum aller Polynome vom maximalen Grad n.
Beh.: $\dim \Pi_n(\mathbb{R}) = n - 1$.
Bew.: Wir betrachten die folgenden äquivalenten Aussagen

$$\begin{aligned} & p \in \Pi_n(\mathbb{R}) \\ \Leftrightarrow\ & p(x) = \textstyle\sum_{k=0}^{n} p_k x^k \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } p(0) = 0 = p'(0) \\ \Leftrightarrow\ & p(x) = \textstyle\sum_{k=0}^{n} p_k x^k \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } p_0 = 0 \text{ und } p_1 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & p(x) = \textstyle\sum_{k=2}^{n} p_k x^k \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow\ & p = \textstyle\sum_{k=2}^{n} p_k m_k \text{ mit den Monomen } m_k. \end{aligned}$$

Demnach ist $\Pi_n(\mathbb{R}) = \operatorname{span}\{m_2, \ldots, m_n\}$. Kombiniert man nun die lineare Unabhängigkeit aller Monome m_k, $k \in \mathbb{N}_0$ aus Blatt 5, Aufgabe 2 mit Bemerkung 2.3.7(2), so ist auch die Familie $\{m_2, \ldots, m_n\}$ linear unabhängig. Demnach definiert $\{m_2, \ldots, m_n\}$ eine Basis von $\Pi_n(\mathbb{R})$ und wir erhalten $\dim \Pi_n(\mathbb{R}) = n - 1$.
Beh.: Es gilt $P_n(\mathbb{R}) = P_1(\mathbb{R}) \oplus \Pi_n(\mathbb{R})$!
Bew.: Aus den obigen Äquivalenzen folgt die Charakterisierung

$$\Pi_n(\mathbb{R}) = \left\{ p \in P_n(\mathbb{R}) : p = \sum_{k=2}^{n} p_k m_k \text{ mit Koeffizienten } p_2, \ldots, p_n \in \mathbb{R} \right\},$$

aus der sofort die beiden in Definition 2.5.1 geforderten Eigenschaften $P_n(\mathbb{R}) = P_1(\mathbb{R}) + \Pi_n(\mathbb{R})$ und $P_1(\mathbb{R}) \cap \Pi_n(\mathbb{R}) = \{0\}$ resultieren.

Aufgabe 4

Vor.: Es seien X, Y lineare Räume und $T \in L(X, Y)$.
Beh.: $N(T)$ ist ein Unterraum von X!
Bew.: Es seien $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ und $x_1, x_2 \in N(T)$. Dann gilt aufgrund der Linearität von T, dass

$$T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 T x_1 + \alpha_2 T x_2 = \alpha_1 0 + \alpha_2 0 = 0$$

und folglich resultiert $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in N(T)$.
Beh.: $R(T)$ ist ein Unterraum von Y!
Bew.: Zu beliebigen Vektoren $y_1, y_2 \in R(T)$ gibt es $x_1, x_2 \in X$ derart, dass $y_i = T x_i$ für $i \in \{1, 2\}$. Wiederum aus der Linearität von T resultiert somit

$$\beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 = \beta_1 T x_1 + \beta_2 T x_2 = T(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2) \quad \text{für alle } \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{K},$$

wobei $\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 \in X$ gilt. Deshalb ist auch $\beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 \in R(T)$ und die Behauptung gezeigt.