C. Pötzsche
F. Marquardt
Zentrum Mathematik
TU München

8. Juni 2011

Lineare Algebra für Informatik

Lösungsvorschlag zum 5. Übungsblatt

Aufgabe 1

- Der Satz 1.3.10 gilt in unveränderter Form auch für Matrizen über beliebigen Körpern $\mathbb{K}$, da lediglich in allgemeinem $\mathbb{K}$ gültige Rechenregeln eingehen.
- Das Superpositionsprinzip aus Satz 1.4.3 erfordert aus gleichem Grunde keinerlei Modifikation.
- Gleiches gilt auch für den Satz 1.4.4.
- Anders verhält es sich mit der Aussage von Satz 1.4.8: Letzterer gilt weiterhin in Körpern mit unendlich vielen Elementen. In endlichen Körpern (etwa $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3$ etc.) liefert der Beweissschritt (II) dagegen nur endlich viele Lösungen αx mit $\alpha \in \mathbb{K}$. Der Beweisschritt (I) gilt allerdings ohne Modifikation. Folglich erhält man über beliebigen Körpern nur noch die Aussage:

  Satz 1.4.8.' *Hat die homogene Gleichung* (L_0) *weniger Gleichungen als Unbekannte, d.h.* $m < n$, *so besitzt sie mindestens eine nichttriviale Lösung.*

- Die Aussage von Satz 1.4.9(a) erfordert keine Modifikation. Mit der Notation aus dem Beweis der Aussage (b) ist jedes $\hat{x} + \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{K}$ eine Lösung von (L_b). Da ein Körper mindestens zwei Elemente besitzt, gibt es also mindestens zwei Lösungen — oder aber keine. Auf dieser Grundlage lässt sich Satz 1.4.9(b) wie folgt formulieren:

  Satz 1.4.9 (b)' *Besitzt* (L_0) *eine nichttriviale Lösung, so kann* (L_b) *nicht eindeutig lösbar sein.*

Aufgabe 2

Vor.: Es sei $m_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $m_k(t) := t^k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.
Beh.: $\{m_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ ist linear unabhängig!
Bew.: Nach Definition 2.3.6 haben wir nachzuweisen, dass jede endliche Teilmenge der Familie $\{m_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ linear unabhängig in $P(\mathbb{R})$ ist. Dabei können wir uns auf die Familien $\mathcal{M}_n := \{m_0, \dots, m_n\}$, $n \in \mathbb{N}_0$, beschränken, weil mit $\mathcal{M}_n$ auch jede ihrer Teilmengen linear unabhängig ist (siehe Bemerkung 2.3.7(2)).

Wir zeigen dies durch vollständige Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$. Im Induktionsanfang $n = 0$ ist die ein-elementige Menge $\{m_0\}$ wegen $m_0 \neq 0 \in P(\mathbb{R})$ linear unabhängig. Im Induktionsschritt $n \to n+1$ sei $\mathcal{M}_n$ linear unabhängig (Induktionsannahme) und es gelte

$$\sum_{k=0}^{n+1} \mu_k m_k = 0 \in P(\mathbb{R}) \quad \text{mit Skalaren } \mu_0, \ldots, \mu_{n+1} \in \mathbb{R}.$$

Im Fall $\mu_{n+1} = 0$ ist $\sum_{k=0}^{n} \mu_k m_k = 0$ und nach Induktionsannahme resultiert dann $\mu_k = 0$ für $0 \leq k \leq n$. Im Fall $\mu_{n+1} \neq 0$ erhalten wir dagegen die Identität

$$t^{n+1} \equiv m_{n+1}(t) \equiv -\frac{1}{\mu_{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \mu_k m_k(t) \equiv -\frac{1}{\mu_{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \mu_k t^k \quad \text{auf } \mathbb{R}$$

und $(n+1)$-maliges Differenzieren liefert den Widerspruch $(n+1)! = 0$; also ist $\mu_{n+1} = 0$.

Aufgabe 3

Vor.: $p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p_n(x) := \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$
Beh.: $\{p_0, p_1, p_2\}$ ist eine Basis von $P_2(\mathbb{R})$!
Bew.: Zunächst haben die Legendre Polynome $p_0, p_1, p_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die explizite Darstellung

$$p_0(x) \equiv 1, \qquad p_1(x) = x, \qquad p_2(x) = \tfrac{1}{2}(3x^2 - 1) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

Wir zeigen nun, dass die Familie $\{p_0, p_1, p_2\}$ ein Erzeugendensystem von $P_2(\mathbb{R})$ ist. Zum Nachweis von $P_2(\mathbb{R}) = \operatorname{span}\{p_0, p_1, p_2\}$ sei $p \in P_2(\mathbb{R})$, $p(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, beliebig vorgegeben. Dann gilt

$$\frac{2a}{3} p_2(x) + b p_1(x) + \left(c + \frac{a}{3}\right) p_0(x) = \frac{a}{3}(3x^2 - 1) + bx + \left(c + \frac{a}{3}\right) = ax^2 + bx + c = p(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ bzw. $p = \frac{2a}{3} p_2 + b p_1 + \left(c + \frac{a}{3}\right) p_0$. Nach Korollar 2.4.15(c) ist jedes Erzeugendensystem mit $3 = \dim P_2(\mathbb{R})$ Elementen eine Basis.

Aufgabe 4

Vor.: Die Familie $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}$ ist linear abhängig in $\mathbb{R}^3$!
Bew.: Siehe Beispiel 2.3.10(2).

Vor.: Die Familie $\{\sinh, \cosh\}$ ist linear unabhängig in $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$!
Bew.: Es gelte $\alpha \sinh + \beta \cosh = 0$ mit Koeffizienten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, d.h.

$$(*) \qquad \alpha \sinh x + \beta \cosh x \equiv 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}.$$

Für $x = 0$ ergibt sich sofort $\beta = 0$. Durch Differentiation von $(*)$ resultiert die Beziehung $\alpha \cosh x + \beta \sinh x \equiv 0$ auf $\mathbb{R}$ und wiederum für $x = 0$ erhalten wir auch $\alpha = 0$.

Vor.: Die Familie $\{\exp, \sinh, \cosh\}$ ist linear abhängig in $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$!

Bew.: Aufgrund der Identität $\exp x = \sinh x + \cosh x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ besitzt $0 \in F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ offenbar die nichttriviale Darstellung

$$\sinh + \cosh - \exp = 0$$

und besagte Familie ist linear abhängig.

Vor.: Die Familie $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ ist linear abhängig in $\mathbb{Z}_5^3$!

Bew.: In $\mathbb{Z}_5$ gelten die Additions- und die Multiplikationstabelle

$+_5$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\cdot_5$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

und folglich erhalten wir

$$3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Damit ist $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ eine Linearkombination der Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und Prop. 2.3.9(b) garantiert, dass obige Menge linear abhängig ist.