C. Pötzsche
F. Marquardt
Zentrum Mathematik
TU München

11. Mai 2011

Lineare Algebra für Informatik

Lösungsvorschlag zum 4. Übungsblatt

Aufgabe 1

Vor.: Es sei $(\mathbb{G}, *)$ eine Gruppe mit neutralem Element e.
Beh.: $e = e^{-1}$
Bew.: Nach Definition 2.1.1(G_2) ist $e * e = e$ und daraus folgt mit Korollar 2.1.8 die Behauptung $e = e^{-1}$.
Beh.: $a = (a^{-1})^{-1}$ für alle $a \in \mathbb{G}$
Bew.: Es sei $a \in \mathbb{G}$ beliebig. Nach Bemerkung 2.1.2(1) gibt es genau ein inverses Element zu $a^{-1} \in \mathbb{G}$. Wegen $a * a^{-1} = e$ ist aber a ein inverses Element zu a^{-1}, also $a = (a^{-1})^{-1}$.

Aufgabe 2

Vor.: Es sei $\Delta_u \subseteq \mathbb{K}^{n\times n}$ die Menge aller oberen Dreiecksmatrizen, deren Diagonalelemente sämtlich ungleich Null sind.
Beh.: Δ_u ist eine Gruppe bezüglich der Matrixmultiplikation.
Bew.: Abgeschlossenheit: Es seien $A, B \in \Delta_u \subseteq \mathbb{K}^{n\times n}$ obere Dreiecksmatrizen mit Diagonalelementen ungleich Null, das heisst,

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, j < i, \\ a_{ii} \neq 0, j = i, \end{cases} \qquad b_{ij} = \begin{cases} 0, j < i, \\ b_{ii} \neq 0, j = i. \end{cases}$$

Dann gilt für das Matrixprodukt

$$\begin{aligned} C = AB &= \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right)_{1\le i,j\le n} \\ &\overset{a_{ik}=0, k<i}{=} \left(\sum_{k=i}^{n} a_{ik} b_{kj} \right)_{1\le i,j\le n} \\ &\overset{b_{kj}=0, k>j}{=} \left(\sum_{k=i}^{j} a_{ik} b_{kj} \right)_{1\le i,j\le n} \\ &= \begin{cases} 0, j < i \\ a_{ii} b_{ii} \neq 0, j = i \end{cases} \end{aligned}$$

und es ist $C = AB \in \Delta_u$.
Die Assoziativität folgt aus dem zweiten Teil von Satz 1.3.10, dem Assoziativ-Gesetz für Matrizen mit $m = n = p = q$.
neutrales Element: Das neutrale Element ist die Einheitsmatrix $I_n \in \Delta_u$, die eine obere Dreiecksmatrix darstellt. Für jedes $A \in \Delta_u$ gilt nämlich

$$AI_n = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\delta_{kj} \right)_{1\leq i,j\leq n} = (a_{ij}\delta_{jj})_{1\leq i,j\leq n} = A = I_n A.$$

inverses Element: Zu einer beliebigen Matrix $A \in \Delta_u$ findet man das inverse Element $X = A^{-1}$ durch Lösung der Gleichung $AX = I_n$ in $\mathbb{R}^{n\times n}$. Dies ist äquivalent zur Lösung der linearen Gleichungen

$$Ax_i = e_i \quad \text{für alle } 1 \leq i \leq n$$

durch Rückwärts-Einsetzen gelöst. Aufgrund von $a_{ii} \neq 0$ für $1 \leq i \leq n$ ist dies eindeutig möglich: Wir erhalten in der Tat

$$x_1 = \begin{pmatrix} a_{11}^{-1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad x_2 = \begin{pmatrix} -\frac{a_{12}}{a_{11}a_{22}} \\ a_{22}^{-1} \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad x_3 = \begin{pmatrix} * \\ * \\ a_{33}^{-1} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{etc.}$$

und vermöge $A^{-1} = (x_1, \dots, x_n)$ sieht man leicht, dass auch A^{-1} obere Dreiecksstruktur mit nicht-verschwindenden Diagonalelementen a_{ii}^{-1} besitzt.

Aufgabe 3

(a) **Vor.:** $\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ versehen mit der Verknüpfung $\cdot_4$.

Beh.: $\mathbb{Z}_4$ ist kein Körper!

Bsp.: Die Verknüpfung $\cdot_4$ besitzt die Verknüpfungstabelle

$\cdot_4$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

und folglich gilt $2 \cdot_4 2 = 0$. Wäre $\mathbb{Z}_4$ ein Körper, so ist nach Korollar 2.1.12 dann $2 = 2 \cdot_4 1 = 0$ und somit $1 = 0$; dies widerspricht Bemerkung 2.1.13.

(b) **Vor.:** $\mathbb{K} = \{a + \sqrt{3}b : \, a, b \in \mathbb{Q}\}$

Beh.: $\mathbb{K} = \{a + \sqrt{3}b : \, a, b \in \mathbb{Q}\}$ ist ein Körper bezüglich der von $\mathbb{R}$ geerbten arithmetischen Operationen!

Bew.: Wir gehen in vier Schritten vor:

(I) Die arithmetischen Operationen sind wohldefiniert, d.h. für beliebige Elemente $\alpha = a_1 + \sqrt{3}b_1, \beta = a_2 + \sqrt{3}b_2 \in \mathbb{K}$ mit $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Q}$ gilt $\alpha + \beta, \alpha\beta \in \mathbb{K}$!
Dazu erhalten wir

$$\alpha + \beta = a_1 + \sqrt{3}b_1 + a_2 + \sqrt{3}b_2 = a_1 + a_2 + \sqrt{3}(b_1 + b_2) \in \mathbb{K},$$

da wegen den Körpereigenschaften von $\mathbb{Q}$ gilt $a_1 + a_2, b_1 + b_2 \in \mathbb{Q}$. Des Weiteren ist

$$\alpha\beta = (a_1 + \sqrt{3}b_1)(a_2 + \sqrt{3}b_2) = a_1a_2 + 3b_1b_2 + \sqrt{3}(a_1b_2 + a_2b_1) \in \mathbb{K},$$

denn die Körpereigenschaften der rationalen Zahlen garantieren die beiden Inklusionen $a_1a_2 + 3b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1 \in \mathbb{Q}$.

(II) $(\mathbb{K}, +)$ ist eine additive Gruppe mit neutralem Element $0 = 0 + \sqrt{3}0$ und dem zu $a + \sqrt{3}b$ Inversen $-a - \sqrt{3}b$!
Der Beweis folgt durch einfaches Nachrechnen der Axiome (K_1^1)–(K_1^4).

(III) $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine multiplikative Gruppe mit neutralem Element $1 = 1 + \sqrt{3}0$ und dem zu $a + \sqrt{3}b$ Inversen $\frac{a}{a^2-3b^2} - \sqrt{3}\frac{b}{a^2-3b^2}$!
Zunächst ist die Wohldefiniertheit des oben genannten Inversen nachzuweisen, d.h. es ist $a^2 - 3b^2 \neq 0$ für alle $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Wir gehen indirekt vor und nehmen $a^2 = 3b^2$ an. Dies ist äquivalent zu $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 3$. Wegen $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ gibt es damit eine rationale Zahl mit dem Quadrat 3; dies widerspricht der Irrationalität von $\sqrt{3}$. Durch Nachrechnen verifiziert man die Eigenschaften (K_2^1)–(K_2^4).

(IV) Auch die beiden Distributivgesetze (K_3) resultieren mittels direktem Nachrechnen.

Aufgabe 4

Vor.: Gegeben sei die lineare Gleichung

$$(*) \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0, \\ x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_3 = 2. \end{cases}$$

Beh.: Über $\mathbb{Z}$ besitzt (*) keine Lösung.
Bew.: Mit dem Gauß-Algorithmus suchen wir zunächst nach einer Lösung in $\mathbb{R}$. Nach dem bekannten Koeffizientenschema ist

$$\begin{array}{ccc|cl} 1 & 2 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \\ 2 & 0 & 1 & 2 & |III - 2I \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ccc|cl} 1 & 2 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \\ 0 & -4 & 1 & 2 & |III + 4II \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & 6 \end{array}$$

was durch Rückwärts-Einsetzen die ein-elementige Lösungsmenge

$$L_b = \left\{ \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

garantiert. Folglich besitzt (*) keine Lösung in $\mathbb{Z}^3$.
Beh.: Über $\mathbb{Z}_3$ besitzt (*) die Lösungsmenge:

$$L_b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{Z}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bew.: Die Tabellen für die arithmetischen Operationen auf $\mathbb{Z}_3$ lauten

$$\begin{array}{c|ccc} +_3 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} \cdot_3 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{array}$$

und wir wenden das Gauß-Verfahren auf (*) an:

$$\begin{array}{ccc|cl} 1 & 2 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \\ 2 & 0 & 1 & 2 & |I+III \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ccc|cl} 1 & 2 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \\ 0 & 2 & 1 & 2 & |II+III \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Wir können also $x_3 = t$ mit beliebigem $t \in \mathbb{Z}_3$ wählen und Rückwärts-Substitution liefert $x_2 = 1 - 2x_3 = 1 - 2t = 1 + t$, sowie $x_1 = -2x_2 = x_2 = 1 + t$. Dies garantiert die oben angegebene Lösungsmenge von (*).