C. Pötzsche
F. Marquardt
Zentrum Mathematik
TU München

18. Juni 2011

Lineare Algebra für Informatik

Lösungsvorschlag zum 3. Übungsblatt

Aufgabe 1

Vor.: Gegeben sei die lineare Gleichung

$$\begin{cases} \alpha x_1 + \beta^2 x_2 = \alpha - \beta, \\ \alpha^2 x_1 + \beta x_2 = \beta - \alpha \end{cases} \tag{1}$$

Lös.: Wir unterscheiden mehrere Fälle:

$\alpha = 0$: Hier reduziert sich (1) auf die beiden Gleichungen

$$\begin{cases} \beta^2 x_2 = -\beta, \\ \beta x_2 = \beta \end{cases}$$

und wir erhalten die Lösungsmenge

$$L_b = \begin{cases} \mathbb{K}^2, & \beta = 0, \\ \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + \mathbb{K}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), & \beta = -1 \\ \emptyset, & \text{sonst} \end{cases}$$

$\beta = 0$: Nun vereinfacht sich (1) zur symmetrischen Situation

$$\begin{cases} \alpha x_1 = \alpha, \\ \alpha^2 x_1 = -\alpha \end{cases}$$

und wie oben resultiert die Lösungsmenge

$$L_b = \begin{cases} \mathbb{K}^2, & \alpha = 0, \\ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + \mathbb{K}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), & \alpha = -1 \\ \emptyset, & \text{sonst} \end{cases}$$

$\alpha\beta = 1$: Dann ist $\alpha \neq 0$ und wir substituieren $\beta = \frac{1}{\alpha}$ in (1) und erhalten

$$\begin{cases} \alpha x_1 + \frac{1}{\alpha^2} x_2 = \alpha - \frac{1}{\alpha}, \\ \alpha^2 x_1 + \frac{1}{\alpha} x_2 = \frac{1}{\alpha} - \alpha, \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} \alpha^2 x_1 + \frac{1}{\alpha} x_2 = \alpha^2 - 1, \\ \alpha^2 x_1 + \frac{1}{\alpha} x_2 = \frac{1}{\alpha} - \alpha. \end{cases}$$

Subtrahiert man beide Gleichungen voneinander, so resultiert die Beziehung $\alpha^2 - 1 - \frac{1}{\alpha} + \alpha = 0$. Diese algebraische Gleichung besitzt die Lösungen 1 und -1 (doppelt), was folgende Lösungsmenge liefert:

$$L_b = \begin{cases} \mathbb{K}\binom{-1}{1}, & \alpha = \beta = 1 \\ \mathbb{K}\binom{1}{1}, & \alpha = \beta = -1 \\ \emptyset, & \text{sonst} \end{cases}$$

- $\alpha\beta \notin \{0, 1\}$: Hier ist die Lösungsmenge einpunktig und lautet

$$L_b = \left\{ \left(\frac{(1+\beta)(\beta-\alpha)}{\alpha(\alpha\beta-1)}, \frac{(1+\alpha)(\alpha-\beta)}{\beta(\alpha\beta-1)} \right) \right\}.$$

<u>**Aufgabe 2**</u>

Vor.:

$$\begin{cases} ix_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0, \end{cases}$$

Lös.:

$$L_0 = \mathbb{C} \begin{pmatrix} -6 - 3i \\ 30 \\ -21 + 2I \end{pmatrix}$$

Vor.:

$$\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 4, \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 7, \end{cases}$$

Lös.:

$$L_b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vor.:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 8x_1 + 10x_2 + 12x_3 = 0, \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 7, \end{cases}$$

Lös.:

$$L_b = \emptyset.$$

Vor.:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 1, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 4, \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = \alpha \end{cases}$$

Lös.: Das aus den ersten drei Gleichungen bestehende System

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 1, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 4, \end{cases}$$

besitzt die eindeutige Lösung $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und setzt man diesen Punkt in die vierte Gleichung ein, so resultiert $\alpha = 7$. Dies liefert die Lösungsmenge

$$L_b = \begin{cases} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, & \alpha = 7, \\ \emptyset, & \text{sonst.} \end{cases}$$

<u>Aufgabe 3</u>

Gibt es eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Form $f(t) := \sum_{k=0}^{3} f_k t^k$, $f_0, \ldots, f_3 \in \mathbb{R}$, welche den Bedingungen

$$f(-2) = -3, \qquad f(-1) = -6, \qquad f(1) = 6, \qquad f(2) = -3$$

genügt? Kann man auch noch zusätzlich $f(0) = 0$ fordern?
Vor.: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(t) := \sum_{k=0}^{3} f_k t^k$, $f_0, \ldots, f_3 \in \mathbb{R}$, und $f(-2) = -3$, $f(-1) = -6$, $f(1) = 6$, $f(2) = -3$.
Beh.: Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) := -2t^3 - t^2 + 8t + 1$ erfüllt die obige Interpolationsaufgabe!
Bew.: Durch Einsetzen der obigen Interpolationsbedingungen $f(t_i) = y_i$ ergeben sich die folgenden vier Bestimmungsgleichungen für die Koeffizienten $f_0, \ldots, f_3$:

$$\begin{cases} f_0 - 2f_1 + 4f_2 - 8f_3 = -3, \\ f_0 - f_1 + f_2 - f_3 = -6, \\ f_0 + f_1 + f_2 + f_3 = 6, \\ f_0 + 2f_1 + 4f_2 + 8f_3 = -3 \end{cases} \tag{2}$$

Der Gauß-Algorithmus liefert dessen eindeutige Lösung $f_0 = 1$, $f_1 = 8$, $f_2 = -1$ und $f_3 = -2$.

Angenommen, das Interpolationspolynom f erfüllt auch noch die Bedingung $f(0) = 0$. Dann müssen die Koeffizienten $f_0, \ldots, f_3$ neben (2) auch noch $f_0 = 0$ erfüllen. Da bereits (2) den Koeffizienten $f_0 = 1$ fixieren, gibt es keine solche Funktion f.

Aufgabe 4

Vor.: $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{K}^m$ und die linearen Gleichungen

(L_b) $$Ax = b,$$

(L_0) $$Ax = 0.$$

(a) **Beh.:** Ist $x, y \in L_0$, so gilt $\alpha x + \beta y \in L_0$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$!

Bew.: Es seien $x, y \in \mathbb{K}^n$ Lösungen von (L_0), d.h. $Ax = 0$ und $Ay = 0$. Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ resultiert dann

$$A\,(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay = 0$$

und somit auch $\alpha x + \beta y =\in L_0$.

(b) **Beh.:** Ist $\hat{x} \in L_b$, so gilt $L_b = \hat{x} + L_0$!

Bew.: Zu einer gegebenen Lösung $\hat{x} \in \mathbb{K}^n$ von (L_b) zeigen wir zwei Inklusionen:

$L_b \subseteq \hat{x} + L_0$: Ist x eine beliebige Lösung von (L_b), d.h. $Ax = b$. Wir müssen zeigen, dass ein $y \in L_0$ derart existiert, dass $x = \hat{x} + y$. In der Tat erfüllt $y := x - \hat{x}$ diese Eigenschaft, denn es ist

$$Ay = A\,(x - \hat{x}) = Ax - A\hat{x} = b - b = 0.$$

$L_b \supseteq \hat{x} + L_0$: Es sei $x \in L_0$, d.h. $x \in \mathbb{K}^n$ ist eine Lösung von (L_0). Die Summe $\hat{x} + x$ erfüllt dann

$$A(\hat{x} + x) = A\hat{x} + Ax = b$$

und folglich löst $\hat{x} + x$ die inhomogene Gleichung (L_b). Formal bedeutet dies $\hat{x} + x \in L_b$.

Maple Aufgabe

Der Befehl `with(linalg)` macht die erforderlichen Routinen aus der linearen Algebra verfügbar und wir definieren `n:=5`. Die Koeffizientenmatrix wird durch `A:=hilbert(n)` erzeugt und die Inhomogenität wird mittels `b1:=Vector(1..n,0)` bzw. `b2:=Vector(1..n,1)` generiert. Die gesuchte Lösungen ergeben sich dann aus `linsolve(A,b1)` und `linsolve(A,b1)`.
Für die Inhomogenität $b = 0$ besitzt $Ax = 0$ nur die triviale Lösung $x = 0$. Andernfalls (alle Elemente von b sind 1) lauten die Lösungen

$$n = 5, \qquad x = \begin{pmatrix} 5 \\ -120 \\ 630 \\ -1120 \\ 630 \end{pmatrix},$$

$$n = 10, \qquad x = \begin{pmatrix} -10 \\ 990 \\ -23760 \\ 240240 \\ -1261260 \\ 3783780 \\ -6726720 \\ 7001280 \\ -3938220 \\ 923780 \end{pmatrix},$$

$$n = 15, \qquad x = \begin{pmatrix} 15 \\ -3360 \\ 185640 \\ -4455360 \\ 58198140 \\ -465585120 \\ 2444321880 \\ -8779605120 \\ 22086194130 \\ -39264345120 \\ 49080431400 \\ -42184833600 \\ 23728968900 \\ -7862853600 \\ 1163381400 \end{pmatrix}$$