C. Pötzsche
F. Marquardt
Zentrum Mathematik
TU München

11. Mai 2011

Lineare Algebra für Informatik

Lösungsvorschlag zum 2. Übungsblatt

Aufgabe 1

Vor.:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0.5 \\ 4 & 7 & 1 \\ 1 & 5 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix},$$

Lös.: Mit dem Schema

$$\begin{array}{ccc|c} & & & 1 \\ & & & 3 \\ & & & 8 \\ \hline 0 & 2 & 0.5 & 1\cdot 0 + 3\cdot 2 + 8\cdot 0.5 \\ 4 & 7 & 1 & 1\cdot 4 + 3\cdot 7 + 8\cdot 1 \\ 1 & 5 & 0.2 & 1\cdot 1 + 3\cdot 5 + 8\cdot 0.2 \end{array} \text{ erhalten wir die Lösung } \begin{pmatrix} 10 \\ 33 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

Vor.:

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 4 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{6} & 1 \end{pmatrix}.$$

Lös.: Mit dem Schema

$$\begin{array}{cc|ccc} & & \frac{1}{7} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ & & \frac{1}{7} & \frac{1}{6} & 1 \\ \hline 6 & 0 & 6\cdot\frac{1}{7} + 0\cdot\frac{1}{7} & 6\cdot\frac{1}{2} + 0\cdot\frac{1}{6} & 6\cdot\frac{1}{6} + 0\cdot 1 \\ 3 & 4 & 3\cdot\frac{1}{7} + 4\cdot\frac{1}{7} & 3\cdot\frac{1}{2} + 4\cdot\frac{1}{6} & 3\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot 1 \\ 9 & 3 & 9\cdot\frac{1}{7} + 3\cdot\frac{1}{7} & 9\cdot\frac{1}{2} + 3\cdot\frac{1}{6} & 9\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot 1 \end{array} \text{ erhalten wir die Lösung } \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & 3 & 1 \\ 1 & \frac{13}{6} & 4.5 \\ \frac{12}{7} & 5 & 4.5 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2

Vor.: Es sei

$$J := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \qquad \text{mit } \lambda \in \mathbb{K}.$$

Bew.: Es gilt

$$J^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_4, \qquad J^1 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad J^2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$$

und

$$J^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & \binom{k}{k-1}\lambda^{k-1} & \binom{k}{k-2}\lambda^{k-2} & \binom{k}{k-3}\lambda^{k-3} \\ 0 & \lambda^k & \binom{k}{k-1}\lambda^{k-1} & \binom{k}{k-2}\lambda^{k-2} \\ 0 & 0 & \lambda^k & \binom{k}{k-1}\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^k \end{pmatrix} \quad \text{für alle } k \geq 3.$$

Bew.: Durch einfaches Nachrechnen verifiziert man die angegebene Form von J^k für die Exponenten $0 \leq k \leq 2$ — damit ist der Induktionsanfang vollbracht. Im Induktionsschritt $k \to k+1$ erhalten wir für $k \geq 3$ Dank des Additionstheorems

$$\binom{n}{l} = \binom{n-1}{l} + \binom{n-1}{l-1} \quad \text{für alle } n, l \in \mathbb{N},$$

dass

$$\begin{aligned} JJ^k &\overset{IA}{=} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^k & \binom{k}{k-1}\lambda^{k-1} & \binom{k}{k-2}\lambda^{k-2} & \binom{k}{k-3}\lambda^{k-3} \\ 0 & \lambda^k & \binom{k}{k-1}\lambda^{k-1} & \binom{k}{k-2}\lambda^{k-2} \\ 0 & 0 & \lambda^k & \binom{k}{k-1}\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda^{k+1} & \binom{k}{k-1}\lambda^k + \binom{k}{k}\lambda^k & \binom{k}{k-2}\lambda^{k-1} + \binom{k}{k-1}\lambda^{k-1} & \binom{k}{k-3}\lambda^{k-2} + \binom{k}{k-2}\lambda^{k-2} \\ 0 & \lambda^{k+1} & \binom{k}{k-1}\lambda^k + \binom{k}{k}\lambda^k & \binom{k}{k-2}\lambda^{k-1} + \binom{k}{k-1}\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda^{k+1} & \binom{k}{k-1}\lambda^k + \binom{k}{k}\lambda^k \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^{k+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda^{k+1} & \binom{k+1}{k}\lambda^k & \binom{k+1}{k-1}\lambda^{k-1} & \binom{k+1}{k-2}\lambda^{k-2} \\ 0 & \lambda^{k+1} & \binom{k+1}{k}\lambda^k & \binom{k+1}{k-1}\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda^{k+1} & \binom{k+1}{k}\lambda^k \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^{k+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung.

Aufgabe 3

(a) **Vor.:** Es seien $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und $\operatorname{tr} A := \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

Beh.: $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$!

Bew.: Für beliebige $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gilt

$$\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right)_{1 \leq i,j \leq n} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ki} b_{ik}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{ki} = \operatorname{tr} \left(\sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj} \right)_{1 \le i,j \le n} = \operatorname{tr} BA$$

und der Beweis ist erbracht.

(b) **Vor.:** Es seien $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{K}^{n \times p}$.

Beh.: Für alle $C \in \mathbb{K}^{n \times p}$ gilt $A(B+C) = AB + AC$.

Bew.: Wegen der Distributivität in $\mathbb{K}$ gilt

$$\begin{aligned} A(B+C) &= \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}) \right)_{1 \le i \le m, 1 \le j \le p} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right)_{1 \le i \le m, 1 \le j \le p} + \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} c_{kj} \right)_{1 \le i \le m, 1 \le j \le p} = AB + AC \end{aligned}$$

Beh.: Für alle $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt $(\alpha A)B = A(\alpha B)$.

Bew.: Aufgrund dem Assoziativitätsgesetz in $\mathbb{K}$ ist

$$(\alpha A)B = \left(\sum_{k=1}^{n} (\alpha a_{ik}) b_{kj} \right)_{1 \le i \le m, 1 \le j \le p} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} (\alpha b_{kj}) \right)_{1 \le i \le m, 1 \le j \le p} = A(\alpha B)$$

Beh.: Für alle $C \in \mathbb{K}^{p \times q}$ gilt $A(BC) = (AB)C$.

Bew.: Mittels der Assoziativität in $\mathbb{K}$ erhält man schließlich

$$\begin{aligned} A(BC) &= A \left(\sum_{k=1}^{p} b_{lk} c_{kj} \right)_{1 \le l \le n, 1 \le j \le q} = \left(\sum_{l=1}^{n} a_{il} \sum_{k=1}^{p} b_{lk} c_{kj} \right)_{1 \le i \le m, 1 \le j \le q} \\ &= \left(\sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} a_{il} b_{lk} c_{kj} \right)_{1 \le i \le m, 1 \le j \le q} = \left(\sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lk} c_{kj} \right)_{1 \le i \le m, 1 \le j \le q} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lk} \right) c_{kj} \right)_{1 \le i \le m, 1 \le j \le q} = \left(\sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lk} \right)_{1 \le i \le m, 1 \le j \le q} C \\ &= (AB)C. \end{aligned}$$

Aufgabe 4

Vor.: Laut Beispiel 1.3.8 aus der Vorlesung gilt:

$$\begin{pmatrix} y \\ i \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{3}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{3}{5} & -\frac{3}{10} & -\frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Beh.: Die Umrechnungsformel für die RGB-Darstellung lautet

$$\begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{23}{24} & \frac{15}{24} \\ 1 & -\frac{7}{24} & -\frac{5}{8} \\ 1 & -\frac{9}{8} & \frac{15}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ i \\ q \end{pmatrix}.$$

Bew.: Ausgeschrieben ist die Gleichung (1) gegeben durch

$$\begin{cases} \frac{3}{10}r + \frac{3}{5}g + \frac{1}{10}b & = y \\ \frac{3}{5}r - \frac{3}{10}g - \frac{3}{10}b & = i \\ \frac{1}{5}r - \frac{1}{2}g + \frac{3}{10}b & = q \end{cases}$$

welche wir nach Multiplikation jeder Gleichung mit dem Faktor 10 in folgendem Schema

$$\begin{array}{ccc|ccc} r & g & b & y & i & q \\ \hline 3 & 6 & 1 & 10 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & -3 & 0 & 10 & 0 \\ 2 & -5 & 3 & 0 & 0 & 10 \end{array}$$

ausdrücken. Äquivalente Umformungen ergeben dann

$$\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 12 & 2 & 20 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & 3 & 0 & -10 & 0 \\ -6 & 15 & -9 & 0 & 0 & -30 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc|ccc} 3 & 6 & 1 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 5 & 20 & -10 & 0 \\ 0 & 27 & -7 & 20 & 0 & -30 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 6 & 1 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & \frac{7}{9} & -\frac{20}{9} & 0 & \frac{10}{3} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc|ccc} -3 & -6 & -1 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{9}{8} & \frac{15}{8} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} -3 & -6 & 0 & -9 & -\frac{9}{8} & \frac{15}{8} \\ 0 & -3 & 0 & -3 & \frac{7}{8} & \frac{15}{8} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{9}{8} & \frac{15}{8} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc|ccc} -3 & -6 & 0 & -9 & -\frac{9}{8} & \frac{15}{8} \\ 0 & 6 & 0 & 6 & -\frac{7}{4} & -\frac{15}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{9}{8} & \frac{15}{8} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 0 & 0 & -3 & -\frac{23}{8} & -\frac{15}{8} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -\frac{7}{24} & -\frac{5}{8} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{9}{8} & \frac{15}{8} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{23}{24} & \frac{15}{24} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -\frac{7}{24} & -\frac{5}{8} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{9}{8} & \frac{15}{8} \end{array}$$

und folglich die Behauptung

Maple Aufgabe

Mittels `with(plots)` laden wir die erforderlichen Graphik-Befehle und `with(linalg)` liefert Routinen aus der linearen Algebra. Die Hilbert-Matrix H_n wird durch den Befehl `hilbert(n)` generiert, während `trace(A)` die Spur einer quadratischen Matrix erzeugt. Damit definieren wir die Folge

```
h:=n->trace(hilbert(n));
```

und der gewünschte Graph ergibt sich dann vermöge

```
pointplot({seq([n,h(n)],n=1..200)});
```