C. Pötzsche
F. Marquardt
Zentrum Mathematik
TU München

4. Mai 2011

Lineare Algebra für Informatik

Vorschlag zum 1. Übungsblatt

Aufgabe 1

- **Vor.:** $X_1 := \mathbb{R}$ und $R_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x < y\}$

  Beh.: R_1 ist weder reflexiv noch symmetrisch, dafür aber transitiv!

  Bew.: Es seien $x, y, z \in \mathbb{R}$.

  Offensichtlich gilt nicht $x < x$, d.h. $(x, x) \notin R_1$. Also ist R_1 nicht reflexiv. Für Paare $(x, y) \in R_1$ und $(y, z) \in R_1$ ist $x < y$ und $y < z$, also $x < z$ und damit $(x, z) \in R_1$. Demnach ist R_1 transitiv. Das Paar $(0, 1)$ ist wegen $0 < 1$ zwar in R_1 enthalten, aber es gilt nicht $1 < 0$ und somit $(1, 0) \notin R_1$; folglich kann die Relation R_1 nicht symmetrisch sein.

- **Vor.:** $X_1 := \mathbb{R}$ und $R_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \geq y\}$

  Beh.: R_2 ist reflexiv und transitiv, aber nicht symmetrisch!

  Bew.: Es seien $x, y, z \in \mathbb{R}$.

  Da sicherlich $x \geq x$ gilt, erhalten wir $(x, x) \in R_2$ und R_2 ist reflexiv. Die Bedingungen $(x, y) \in R_2$ und $(y, z) \in R_2$ sind gleichbedeutend mit $x \geq y$ und $y \geq z$, was nunmehr $x \geq z$ impliziert. Demzufolge gilt $(x, z) \in R_2$ und R_2 ist auch transitiv. Ferner ist R_2 nicht symmetrisch, denn obwohl das Paar $(1, 0)$ in der Relation R_2 enthalten ist, gilt keineswegs $0 \geq 1$ bzw. $(0, 1) \in R_2$.

- **Vor.:** $X_3 := \{\text{Menschen}\}$ und $R_3 := \{(x, y) \in X \times X : x \text{ ist verwandt mit } y\}$

  Beh.: R_3 ist reflexiv, transitiv und symmetrisch, also eine Äquivalenzrelation!

  Bew.: Es seien x, y, z Menschen.

  Weil jeder Mensch x mit sich selbst verwandt ist, gilt $(x, x) \in R_3$ und R_3 ist reflexiv. Ist x mit y verwandt und y mit z, so sind auch x und z verwandt, d.h. $(x, z) \in R_3$ und R_3 ist transitiv. Ferner ist die Verwandtschafts-Relation offensichtlich symmetrisch.

  Die zugehörigen Äquivalenzklasse $[x]$ zu einem Menschen x ist die Menge aller mit ihm verwandten Menschen, d.h. seine Familie.

- **Vor.:** $R_4 = \{(x, y) \in X_4 \times Y_4 : x \text{ ist Tochter von } y\}$ zwischen den beiden Mengen $X_4 := \{\text{Frauen}\}$ und $Y_4 := \{\text{Männer}\}$

  Bem.: Da R_4 keine Relation auf einer Menge ist, macht die Fragestellung keinen Sinn!

<u>Aufgabe 2</u>
Vor.: Es sei $X = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : n \neq 0\}$ und

$$A := \left\{ \big((m_1, n_1), (m_2, n_2)\big) \in X \times X : m_1 n_2 = m_2 n_1 \right\}.$$

Beh.: A ist eine Äquivalenzrelation!
Bew.: Es seien $(m_1, n_1), (m_2, n_2), (m_3, n_3) \in X$.
Aufgrund der trivialen Aussage $m_1 n_1 = m_1 n_1$ ist auch $\big((m_1, n_1), (m_1, n_1)\big) \in A$, d.h. die Relation A ist reflexiv. Für $\big((m_1, n_1), (m_2, n_2)\big) \in A$ und $\big((m_2, n_2), (m_3, n_3)\big) \in A$ ist

$$m_1 n_2 = m_2 n_1, \qquad m_2 n_3 = m_3 n_2,$$

was wegen $n_i \neq 0$, $1 \leq i \leq 3$, äquivalent zu

$$\frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2}, \qquad \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_3}{n_3}$$

ist. Somit gilt auch $\frac{m_1}{n_1} = \frac{m_3}{n_3}$ und gleichwertig $m_1 n_3 = m_3 n_1$, was schießlich die gewünschte Inklusion $\big((m_1, n_1), (m_3, n_3)\big) \in A$ zur Folge hat; wir haben die Transitivität von A gezeigt. Nun ist A auch noch symmetrisch, denn $\big((m_1, n_1), (m_2, n_2)\big) \in A$ bedeutet

$$m_1 n_2 = m_2 n_1$$

und es resultiert $\big((m_2, n_2), (m_1, n_1)\big) \in A$.
Aus den Beziehungen

$$[(m_1, n_1)] = \{(m_2, n_2) \in X : m_1 n_2 = m_2 n_1\} = \left\{(m_2, n_2) \in X : \frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2}\right\}$$

erkennt man, dass die Äquivalenzklassen von A gerade die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ sind.

<u>Aufgabe 3</u>

- **Vor.:** $D_1 = B_1 = \mathbb{R}$ und $f_1(x) := x^3$

  Beh.: f_1 ist injektiv, surjektiv und es gilt $f_1(D_1) = \mathbb{R}$!

  Bew.: Für jedes $y \in \mathbb{R}$ erhält man aus der Eindeutigkeit und Existenz der Wurzelfunktion das Urbild $f_1^{-1}(\{y\}) = \left\{\sqrt[3]{y}\right\}$. Damit ist f_1 injektiv und surjektiv. Ferner besitzt f_1 das Bild $f_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Ihre Umkehrabbildung lautet $f_1^{-1} : B_1 \to D_1$ mit der Abbildungsvorschrift $f_1^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

- **Vor.:** $D_2 = B_2 = \mathbb{R}$ und $f_2(x) := \sin(\pi x)$

  Beh.: f_2 ist weder injektiv noch surjektiv und es gilt $f_2(D_2) = [-1, 1]$.

  Bew.: Um zu gegebenem $y \in B_2 = \mathbb{R}$ das Urbild $f_2^{-1}(\{y\})$ zu bestimmen, ist die transzendente Gleichung $\sin(\pi x) = y$ nach y zu lösen. Hierzu unterscheiden wir mehrere Fälle: Im Fall $|y| > 1$ existieren offensichtlich keine Lösungen x, denn die Werte der Sinus-Funktion liegen im Intervall $[-1, 1]$, d.h. $f_2^{-1}(\{y\}) = \emptyset$. Für $y = 1$ und jedes $k \in \mathbb{Z}$ ist $x = 2k + \frac{1}{2}$ eine Lösung und somit $f_2^{-1}(\{1\}) = \left\{2k + \frac{1}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}$. Analog folgt für $y = -1$ das Urbild $f_2^{-1}(\{-1\}) = \left\{2k + \frac{3}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}$. Schließlich erhalten wir im verbleibenden Fall $y \in (-1, 1)$ die Urbilder

  $$f_2^{-1}(\{y\}) = \left\{2k + \frac{\arcsin y}{\pi} : k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{2k + 1 - \frac{\arcsin y}{\pi} : k \in \mathbb{Z}\right\}$$

  Demzufolge ist f_2 nicht surjektiv und auch nicht injektiv. Allerdings existiert zu jedem $y \in [-1, 1]$ mindestens ein Urbild und daher $f_2(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.

- **Vor.:** $D_3 = \mathbb{R}$, $B_3 = [-1, 1]$ und $f_3(x) := \sin(\pi x)$

  Beh.: f_3 ist nicht injektiv, aber surjektiv und es gilt $f_3(D_3) = [-1, 1]$.

  Bew.: Die Behauptung folgt aus den obigen Überlegungen.

- **Vor.:** $D_4 = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $B_2 = [-1, 1]$ und $f_4(x) := \sin(\pi x)$

  Beh.: f_4 ist injektiv, surjektiv und es gilt $f_4(D_4) = [-1, 1]$.

  Bew.: Wie oben gilt $f_4^{-1}(\{y\}) = \left\{\frac{\arcsin y}{\pi}\right\}$ für alle $y \in [-1, 1] = B_4$ und damit ist f_4 surjektiv und injektiv, also bijektiv. Ferner gilt ebenso $f_4(D_4) = [-1, 1]$ und die Umkehrabbildung ergibt sich zu $f_4^{-1} : [-1, 1] \to [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ mit $f_4^{-1}(x) = \frac{\arcsin x}{\pi}$.

Aufgabe 4

Vor.: Es seien D, B nichtleer, $A_1, A_2 \subseteq D$, $B_1, B_2 \subseteq B$ und eine Abbildung $f : D \to B$ gegeben.

- **Beh.:** $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

  Bew.: Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

  $$\begin{aligned} & y \in f(A_1 \cup A_2) \\ \Leftrightarrow\ & \text{es existiert ein } x \in A_1 \cup A_2 \text{ mit } f(x) = y \\ \Leftrightarrow\ & \text{es gibt ein } x \in A_1 \text{ mit } f(x) = y, \text{ oder es gibt ein } x \in A_2 \text{ mit } f(x) = y \\ \Leftrightarrow\ & y \in f(A_1) \text{ oder } y \in f(A_2) \\ \Leftrightarrow\ & y \in f(A_1) \cup f(A_2) \end{aligned}$$

  und folglich ergibt sich die Behauptung.

- **Beh.:** $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

  Bew.: Wir erhalten die folgenden Äquivalenzen:

$$
\begin{aligned}
& x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2) \\
\Leftrightarrow\ & \text{es existiert ein } y \in B_1 \cup B_2 \text{ mit } f(x) = y \\
\Leftrightarrow\ & \text{es gibt ein } y \in B_1 \text{ mit } f(x) = y, \text{ oder es gibt ein } y \in B_2 \text{ mit } f(x) = y \\
\Leftrightarrow\ & x \in f^{-1}(B_1) \text{ oder } x \in f^{-1}(B_2) \\
\Leftrightarrow\ & x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2),
\end{aligned}
$$

was unsere Behauptung zeigt.

- **Beh.:** $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$

  Bew.: Im Fall $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ gilt die Behauptung trivialerweise. Im Fall von nicht disjunkten Mengen A_1 und A_2 mit $y \in f(A_1 \cap A_2)$ existiert ein $x \in A_1 \cap A_2$ derart, dass $f(x) = y$. Wegen $x \in A_1$ und $x \in A_2$ gilt $y \in f(A_1)$ und $y \in f(A_2)$, also die Inklusion $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$.

  Bsp.: Es sei $D := \{1, 2\}$, $B := \{0\}$ und $f : D \to B$ definiert durch $f(1) := f(2) := 0$. Mit $A_1 := \{1\}$ und $A_2 := \{2\}$ gilt dann $f(A_1 \cap A_2) = f(\emptyset) = \emptyset$, andererseits aber die Beziehung $f(A_1) \cap f(A_2) = \{0\} \cap \{0\} = \{0\} \neq \emptyset$.

- **Beh.:** $f^{-1}(A_1 \cap A_2) = f^{-1}(A_1) \cap f^{-1}(A_2)$

  Bew.: Wiederum erhält man die Äquivalenzen

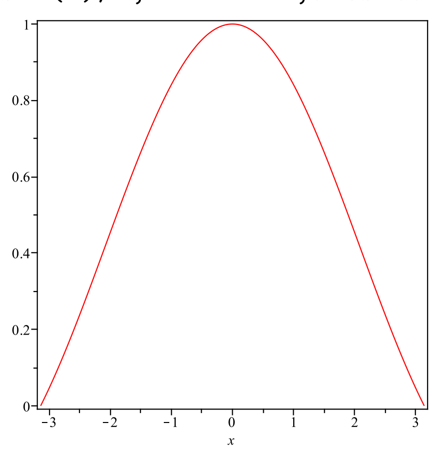
$$
\begin{aligned}
& x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) \\
\Leftrightarrow\ & f(x) \in B_1 \cap B_2 \\
\Leftrightarrow\ & f(x) \in B_1 \text{ und } f(x) \in B_2 \\
\Leftrightarrow\ & x \in f^{-1}(B_1) \text{ und } x \in f^{-1}(B_2) \\
\Leftrightarrow\ & x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2),
\end{aligned}
$$

  was der Behauptung entspricht.

Maple Aufgabe

- Für $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{\sin x}{x}$ liefert der Befehl

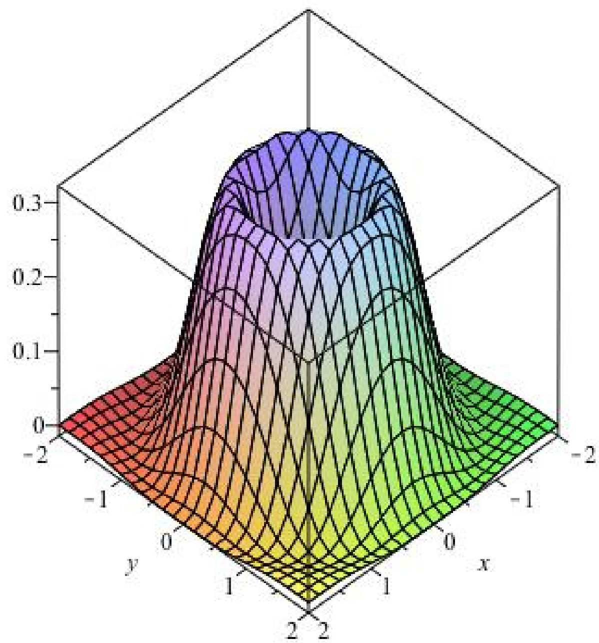
```
plot(sin(x)/x,x=-Pi..Pi,axes=boxed);
```



Hierbei handelt es sich um den Graph der Funktion f.

- Für $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) := \exp(-x^2 - y^2)\sin(x^2 + y^2)$, liefert der Befehl

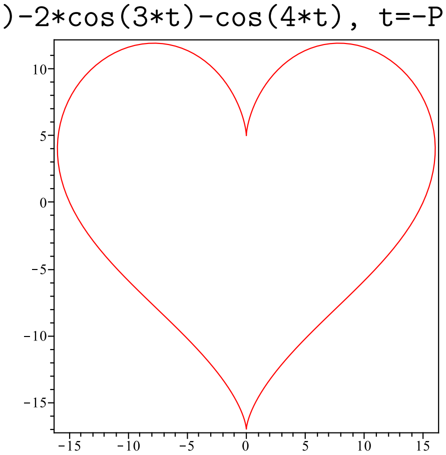
```
plot3d(exp(-x*x-y*y)*sin(x*x+y*y),x=-2..2,y=-2..2,axes=boxed);
```



Hierbei handelt es sich um den Graph der Funktion g.

- Für $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $h(t) := \begin{pmatrix} 16\sin(t)^3 \\ 13\cos(t) - 5\cos(2t) - 2\cos(3t) - \cos(4t) \end{pmatrix}$ liefert der Befehl

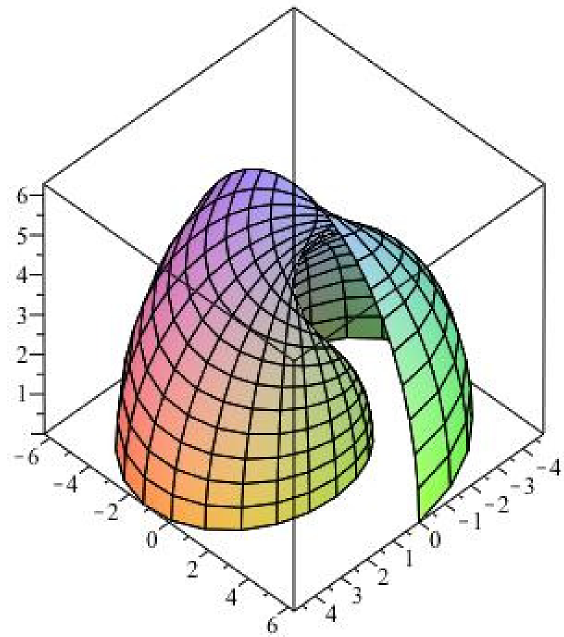
```
plot([16*sin(t)*sin(t)*sin(t),
13*cos(t)-5*cos(2*t)-2*cos(3*t)-cos(4*t), t=-Pi..Pi],axes=boxed);
```



Dargestellt ist das Bild der Funktion h.

- Für $j : [0, 2\pi] \times [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$, $j(u, v) := \begin{pmatrix} u\sin(u)\cos(v) \\ u\cos(u)\cos(v) \\ u\sin(v) \end{pmatrix}$ liefert der Befehl

```
plot3d([u*sin(u)*cos(v),u*cos(u)*cos(v),u*sin(v)],
        u=0..2*Pi,v=0..Pi,axes=boxed);
```



Dargestellt ist das Bild der Funktion j.