C. Pötzsche
F. Marquardt
Zentrum Mathematik
TU München

14. Juli 2011

Lineare Algebra für Informatik

10. Übungsblatt

Abgabe: Übungen am Dienstag, 19.07., Mittwoch, 20.07. und Donnerstag, 21.07.
Besprechung: In den Übungen jeweils eine Woche später
Übungsblätter und weitere Informationen zur Vorlesung findet man unter

`http://www-m3.ma.tum.de/Allgemeines/LAInfo11`

Aufgabe 1

Es sei eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit dem charakteristischen Polynom

$$\chi_A(t) := \det(A - tI_n) = \sum_{k=0}^{n} c_k t^k$$

gegeben. Man zeige, dass dessen Koeffizienten dann den Beziehungen

$$c_n = (-1)^n, \qquad c_{n-1} = (-1)^{n-1} \operatorname{tr} A, \qquad c_0 = \det A.$$

genügen. Hierbei ist $\operatorname{tr} A := \sum_{k=1}^{n} a_{kk}$ die *Spur* von A aus Aufgabe 3, Blatt 2.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie für die folgenden Matrizen über $\mathbb{C}$ ihre Eigenwerte, deren algebraische und geometrische Vielfachheiten sowie die zugehörigen Eigenvektoren und Eigenräume:

$$A := \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 2.5 & 1 & 1.5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -0.5 & -1 & 0.5 \end{pmatrix}, \qquad C := \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 9 & -48 & 4 \\ 36 & 4 & -33 \\ 32 & 9 & 36 \end{pmatrix}.$$

Hierbei ist α ein reeller Parameter. Welche Matrizen sind diagonalisierbar?

Aufgabe 3

(a) Zeigen Sie, dass für ungerades n jedes $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mindestens einen Eigenwert hat.

(b) Es sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ invertierbar. Stellen Sie das charakteristische Polynom von A^{-1} mittels des charakteristischen Polynoms von A dar. Beweisen Sie Ihre Behauptung.

Aufgabe 4

Entscheiden Sie durch Ankreuzen, ob die nachstehenden Aussagen jeweils wahr (w) oder falsch (f) sind und geben Sie in jedem der Fälle eine Begründung oder ein Gegenbeispiel an:

w	f	
		(a) Die Spur einer Matrix $\operatorname{tr} : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}$ ist linear.
		(b) Eine Abbildung $T \in L(\mathbb{K}^4, \mathbb{K}^3)$ ist genau dann bijektiv, wenn sie injektiv ist.
		(c) Ähnliche Matrizen haben die gleiche Determinante.
		(d) Die endliche Vereinigung von Unterräumen ist wieder ein linearer Raum.
		(e) Die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ ist diagonalisierbar.