C. Pötzsche
F. Marquardt
Zentrum Mathematik
TU München

27. Juni 2011

Lineare Algebra für Informatik

8. Übungsblatt

Abgabe: Übungen am Dienstag, 05.07., Mittwoch, 06.07. und Donnerstag, 07.07.
Besprechung: In den Übungen jeweils eine Woche später
Übungsblätter und weitere Informationen zur Vorlesung findet man unter

`http://www-m3.ma.tum.de/Allgemeines/LAInfo11`

Aufgabe 1

(a) Für reguläre Matrizen $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ zeige man die Beziehungen

$$(A^{-1})^{-1} = A, \qquad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

(b) Beweisen Sie die Implikation $(a) \Rightarrow (b)$ in Satz 3.3.14:
(a) $T_A \in GL(\mathbb{K}^n) \Rightarrow$ (b) A ist regulär.

(c) Beweisen Sie den Satz 3.3.15:
Es sei $b \in \mathbb{K}^m$. Eine lineare inhomogene Gleichung (L_b) hat genau dann eine Lösung, wenn für die augmentierte Koeffizientenmatrix gilt

$$\operatorname{rk} A = \operatorname{rk}(A, b).$$

Aufgabe 2

Finden Sie für folgende lineare Abbildungen T eine weitere lineare Abbildung T' derart, dass $T' \circ T = \mathrm{id}$ gilt:

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad Tx := \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \end{pmatrix},$$

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad Tx := \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \\ -x_1 + x_2 \end{pmatrix},$$

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4, \qquad Tx := \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 4x_1 + 3x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$T : C([0,1], \mathbb{R}) \to C^1([0,1], \mathbb{R}), \qquad (T\phi)(t) := 2\int_0^t \phi(s)\, ds \quad \text{für alle } t \in [0,1]$$

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Abbildungsmatrizen der elementaren $\mathbb{K}^{n\times n}$-Matrixoperationen Vertauschen zweier Zeilen, Addition zweier Zeilen und Multiplikation einer Zeile mit $\alpha \in \mathbb{K}$. Wie lauten die inversen Abbildungsmatrizen und welche Wirkung haben diese?

Aufgabe 4

Zu den Vektoren $a, b, c \in \mathbb{R}^3$

$$a := \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, b := \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, c := \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

sei $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Abbildung die a, b, c in $b, -a, c$ überführt. Berechnen Sie die Abbildungsmatrix von T.