C. Pötzsche
F. Marquardt
Zentrum Mathematik
TU München

31. Mai 2011

Lineare Algebra für Informatik

5. Übungsblatt

Abgabe: Übungen am Dienstag, 7.06., Mittwoch, 8.06. und Donnerstag, 9.6.2011
Besprechung: Übungen am Dienstag, 14.06., Mittwoch, 15.06. und Donnerstag, 16.05.2011
Übungsblätter und weitere Informationen zur Vorlesung findet man unter

`http://www-m3.ma.tum.de/Allgemeines/LAInfo11`

Aufgabe 1

Welche der in den Abschnitten 1.3 und 1.4 gemachten Aussagen (siehe Rückseite) gelten, wenn $\mathbb{K}$ durch eine beliebigen Körper ersetzt wird? Begründen Sie kurz.

Aufgabe 2

Mit den durch $m_k(t) := t^k$ definierten Monomen $m_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}_0$, zeige man, dass die Familie $\{m_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ linear unabhängig in $P(\mathbb{K})$ ist.

Aufgabe 3

Die *Legendre-Polynome* $p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind definiert durch

$$p_n(x) := \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Zeigen Sie, dass $\{p_0, p_1, p_2\}$ eine Basis von $P_2(\mathbb{R})$ ist.

Aufgabe 4

Überprüfen Sie die folgenden Familien auf lineare Abhängigkeit:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{in } \mathbb{R}^3,$$

$$\{\sinh, \cosh\} \quad \text{in } F(\mathbb{R}, \mathbb{R}),$$

$$\{\exp, \sinh, \cosh\} \quad \text{in } F(\mathbb{R}, \mathbb{R}),$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{in } \mathbb{Z}_5^3$$

mit den hyperbolischen Funktionen $\sinh, \cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\sinh t := \frac{e^t - e^{-t}}{2}$, $\cosh t := \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ und der Exponential-Funktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\exp t := e^t$.

Satz 1.3.10:
Für Zahlen $\alpha \in \mathbb{K}$ und Matrizen $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{K}^{n\times p}$ gelten das *Distributiv-Gesetz*

$$A(B + C) = AB + AC \quad \text{für alle } C \in \mathbb{K}^{n\times p}$$

und die *Assoziativ-Gesetze*

$$(\alpha A)B = A(\alpha B), \qquad\qquad A(BC) = (AB)C \quad \text{für alle } C \in \mathbb{K}^{p\times q}.$$

Satz 1.4.3:
Es seien $x, y \in \mathbb{K}^n$ Lösungen der homogenen Gleichung (L_0). Dann ist auch $\alpha x + \beta y$ eine Lösung von (L_0), d.h.

$$\alpha x + \beta y \in L_0 \quad \text{für alle } \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

Satz 1.4.4:
Ist $\hat{x} \in \mathbb{K}^n$ eine Lösung der homogenen Gleichung (L_0) und $x \in \mathbb{K}^n$ eine Lösung von (L_b), so ist $\hat{x} + x$ eine Lösung von (L_b), d.h. $\hat{x} + x \in L_b$.

Satz 1.4.7:
Hat die homogene Gleichung (L_0) weniger Gleichungen als Unbekannte, d.h. $m < n$, so besitzt sie unendlich viele verschiedene Lösungen.

Satz 1.4.8:
Hat die inhomogene Gleichung (L_b) genauso viele Gleichungen wie Unbekannte, d.h. $m = n$, so gilt:

(a) Ist $L_0 = \{0\}$, so besitzt (L_b) genau eine Lösung.

(b) Besitzt (L_0) eine nichttriviale Lösung, so existieren entweder keine oder unendlich viele verschiedene Lösungen von (L_b).