Math. Semesterber. 48, 247–260 (2002)

Folkmar Bornemann

Normen zur Charakterisierung der schwach*-Konvergenz beschränkter Folgen

Eingegangen am 16. Februar 2001 / Angenommen am 15. Mai 2001

Zusammenfassung. Wir zeigen, wie sich die schwach*-Konvergenz beschränkter Folgen eines Dualraums $\boldsymbol{X'}$ durch *Normen* charakterisieren lässt, sofern der Prädualraum $\boldsymbol{X}$ *separabel* ist. Auf diese Weise lassen sich interessante Anwendungen der schwach*-Topologie bereits aus der Theorie normierter Räume herleiten – ein Vorteil etwa für einführende Vorlesungen in die lineare Funktionalanalysis, in welcher lokalkonvexe Räume nicht thematisiert werden können. Wir diskutieren die Anwendung des Satzes von Krein-Milman in seiner Fassung für normierte Räume und geben elementare Beweise des Lemmas von Schur sowie einer Verallgemeinerung des Riemann-Lebesgue'schen Lemmas.

Einleitung

In vielen Anwendungen der Funktionalanalysis erweist sich der *Satz von Alaoglu*, also die schwach*-Kompaktheit der Einheitskugel eines Dualraums X', als eine wichtige Quelle von Existenzaussagen. In dieser Allgemeinheit ist der Satz eine Aussage über die von X induzierte lokalkonvexe Topologie auf X', benötigt also die Theorie lokalkonvexer Räume.

Beschränkt man sich jedoch auf den Fall *separabler* Prädualräume X, so ist die schwach*-Topologie auf der Einheitskugel metrisch und Kompaktheit daher äquivalent zur Folgenkompaktheit. Formuliert man den Satz von Alaoglu nun direkt in diesem Sinne, so erhält man den klassischen *Satz von Banach-Alaoglu*: *Für einen separablen normierten Raum X besitzt jede beschränkte Folge in X' eine punktweise konvergente (d.h. schwach*-konvergente) Teilfolge.* So formuliert besitzt der Satz eine einfache Herleitung aus dem Satz von Arzelà-Ascoli und ist für die meisten Anwendungen auch hinreichend stark: Erstens, weil die typischerweise benutzten Dualräume separable Prädualräume besitzen, und zweitens, weil Folgenkompaktheit vielfach ausreicht. In einer einführenden Vorlesung über lineare Funktionalanalysis wird man sich daher meist mit dieser Version des Satzes von Alaoglu begnügen.

Ein wichtiger Satz und seine Anwendungen bleiben bei diesem Vorgehen aber außen vor, nämlich der *Satz von Krein-Milman* über die Existenz von Extremalpunkten kompakter konvexer Mengen. Er lässt sich zwar für normierte Räume einfach beweisen, interessante Anwendungen liefert aber erst seine Formulierung für lokalkonvexe Räume in Zusammenhang mit dem Satz von Alaoglu – so jedenfalls lautet die Lesart in den bekannten Büchern zur Funktionalanalysis.

F. Bornemann: Zentrum Mathematik, Technische Universität München, 80290 München.
e-mail: bornemann@ma.tum.de

Die vorliegende Arbeit macht nun einen einfachen Vorschlag, wie der Satz von Krein-Milman, formuliert für normierte Räume, dennoch elementar für interessante Anwendungen nutzbar gemacht werden kann: *Man charakterisiere die schwach*-Konvergenz beschränkter Folgen durch geeignete Normen.* Auch über den Satz von Krein-Milman hinaus besitzt dieser Vorschlag eine Fülle interessanter und nützlicher Eigenschaften, welche wir thematisieren wollen.

In *Abschnitt 1* werden wir eine Familie von Normen zur Charakterisierung der schwach*-Konvergenz beschränkter Folgen einführen. Die Beweise dieses Abschnitts sind komplett elementar. In *Abschnitt 2* zeigen wir, wie man den Satz von Krein-Milman in seiner Formulierung für normierte Räume so anwenden kann, dass er interessante Ergebnisse zu Tage fördert. Unter anderem kann man zum Satz von Ljapunov und seinen Anwendungen in der Theorie der Optimalsteuerung gelangen. In *Abschnitt 3* geben wir einen elementaren Beweis des *Lemmas von Schur*, dass schwach konvergente Folgen im Folgenraum ℓ^1 normkonvergent sind. Hier machen wir in überraschender Weise Gebrauch von den zuvor eingeführten Normen. Einziges zusätzliches Hilfsmittel ist der Baire'sche Kategoriensatz. In *Abschnitt 4* verallgemeinern wir die bisher betrachtete Familie von Normen, indem wir einen Zusammenhang mit kompakten Einbettungen herstellen. So können wir zeigen, dass die Separabilität des Prädualraums für unsere Methodik *notwendig* war. Zudem erhalten wir etwa für die Soboleväume naheliegende und einfach zu handhabende Vertreter der Normfamilie. In *Abschnitt 5* wenden wir die Normen an, um eine Verallgemeinerung des Riemann-Lebesgue'schen Lemmas sehr direkt aus einer einfachen Abschätzung von Fourierkoeffizienten zu beweisen. In *Abschnitt 6* zeigen wir schließlich, dass die hier vorgestellten Familien von Normen neben ihrem Nutzen zur Charakterisierung der schwach*-Konvergenz *beschränkter* Folgen wohl keine interessante kanonische Struktur auf *ganz* X' induzieren. Enge Verwandte innerhalb der Familien von Normen sind nicht äquivalent, und der einfachste Vorschlag, eine kanonische Norm aus diesen Familien zu konstruieren, führt direkt zurück auf die Operatornorm.

1. Eine Familie charakterisierender Normen

In fortgeschrittenen Texten zur Funktionalanalysis wird bewiesen, dass die schwach*-Topologie auf beschränkten Teilmengen von X' genau dann metrisierbar ist, wenn der Prädualraum X separabel ist [3, Theorem V.5.1]. Nimmt man eine Folge $\sigma = (x_k)$ mit $X = \overline{\operatorname{span}}\,\sigma$, so lautet eine oft angegebene Metrik:

$$d_1(x', y') = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|(x'-y')(x_k)|}{1+|(x'-y')(x_k)|}, \qquad x', y' \in X'.$$

Zuweilen wird beobachtet [9, Aufgabe VIII.6.15(e)], dass sich diese Metrik für eine *beschränkte* Folge σ vereinfachen lässt zur äquivalenten Metrik

$$d_2(x', y') = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} |(x'-y')(x_k)|, \qquad x', y' \in X'.$$

Tatsächlich sind wir jetzt nur einen kleinen Schritt von einer Norm entfernt.

Hier beginnt unsere Geschichte.

Lemma 1. *Es sei X ein separabler normierter Raum. Eine Folge σ in der Einheitssphäre S_X heisst separierend, falls $X = \overline{\operatorname{span}}\,\sigma$ gilt. Für eine separierende Folge $\sigma = (x_k)$ definiert*

$$\|x'\|_\sigma = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}|x'(x_k)|, \qquad x' \in X',$$

eine Norm auf dem Dualraum X'. Es gilt die Abschätzung $\|x'\|_\sigma \leq \|x'\|$.

Beweis. Als absolut konvergente Reihe von Halbnormen $x' \mapsto 2^{-k}|x'(x_k)|$ definiert auch $\|\cdot\|_\sigma$ eine Halbnorm auf X'. Falls nun $\|x'\|_\sigma = 0$ ist, so ist $x'(x_k) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und x' verschwindet daher auf $\operatorname{span}\sigma$. Da dieser Unterraum dicht in X liegt, folgt sofort $x' = 0$. Also handelt es sich um eine Norm. Da $\sigma = (x_k)$ Folge in S_X ist, können wir wie folgt abschätzen:

$$\|x'\|_\sigma = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}|x'(x_k)| \leq \|x'\| \cdot \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = \|x'\|. \qquad \Box$$

Mit Hilfe dieser Normen können wir nun die schwach*-Konvergenz beschränkter Folgen in X' charakterisieren.

Theorem 1. *Es sei X ein separabler normierter Raum und σ eine separierende Folge in S_X. Für eine $\|\cdot\|$-beschränkte Folge (x'_n) in X' konvergiert $x'_n \xrightarrow{*} x'$ genau dann, wenn $\|x'_n - x'\|_\sigma \to 0$.*

Beweis. Ohne Einschränkung dürfen wir $x' = 0$ annehmen. Die Folge (x'_n) sei durch $M > 0$ beschränkt. Es konvergiere nun $x'_n \xrightarrow{*} 0$. Zu einem beliebig gewählten $\epsilon > 0$ gibt es also Zahlen $k_0, n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für $n \geq n_0$ gilt

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} 2^{-k} \leq \epsilon/2M, \qquad \sum_{k=1}^{k_0} 2^{-k}|x'_n(x_k)| \leq \epsilon/2.$$

Insgesamt erhalten wir so für $n \geq n_0$

$$\|x'_n\|_\sigma \leq M \sum_{k=k_0+1}^{\infty} 2^{-k} \;+\; \sum_{k=1}^{k_0} 2^{-k}|x'_n(x_k)| \leq M\epsilon/2M \;+\; \epsilon/2 = \epsilon,$$

also die gewünschte Konvergenz in der $\|\cdot\|_\sigma$-Norm. Es konvergiere nun andererseits $\|x'_n\|_\sigma \to 0$. Da für alle $k \in \mathbb{N}$

$$|x'_n(x_k)| \leq 2^k\|x'_n\|_\sigma \to 0, \qquad n \to \infty,$$

gilt, ist $x'_n(x) \to 0$ für alle $x \in D = \operatorname{span}\sigma$. Dieser Unterraum D liegt aber dicht in X, so dass aus der Beschränktheit der Folge (x'_n) schließlich die Konvergenz $x'_n(x) \to 0$ für alle $x \in X$ folgt, d.h. $x'_n \xrightarrow{*} 0$. $\Box$

Der Bequemlichkeit halber stellen wir noch einige unmittelbare Folgen zusammen.

Korollar 1. *Es sei X ein separabler normierter Raum und σ eine separierende Folge in S_X.*

(a) Eine $\|\cdot\|$-beschränkte Menge $K \subset X'$ ist genau dann schwach-folgenkompakt, wenn sie kompakt ist bezüglich der $\|\cdot\|_\sigma$-Norm.*
(b) Die Einheitskugel $B_{(X',\|\cdot\|)}$ ist kompakt in $(X', \|\cdot\|_\sigma)$.
(c) Für $\dim X = \infty$ sind die Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|_\sigma$ auf X' nicht äquivalent.
(d) Ist $\dim X = \infty$, so ist $(X', \|\cdot\|_\sigma)$ nicht vollständig.
(e) Ist $\dim X = \infty$, so gibt es eine Folge (x'_n) in $S_{X'}$ mit $x'_n \overset{*}{\rightharpoonup} 0$.

Beweis. (a) Dies folgt unmittelbar aus Theorem 1.

(b) Da aus $x'_n \overset{*}{\rightharpoonup} x'$ sofort die einfache Abschätzung $\|x'\| \le \liminf \|x'_n\|$ folgt, ist die Einheitskugel $B_{(X',\|\cdot\|)}$ schwach*-folgenabgeschlossen und daher nach dem in der Einleitung angegebenen Satz von Banach-Alaoglu[1] schwach*-folgenkompakt. Also liefert uns (a) das Ergebnis.

(c) $B_{(X',\|\cdot\|)}$ ist nach dem Lemma von Riesz nicht kompakt in $(X', \|\cdot\|)$, da wir X als unendlichdimensional vorausgesetzt haben.

(d) Der Dualraum $(X', \|\cdot\|)$ ist ein Banachraum. Wäre auch $(X', \|\cdot\|_\sigma)$ ein Banachraum, so zeigte eine Konsequenz des Satzes von der offenen Abbildung, dass die einseitige Abschätzung $\|x'\|_\sigma \le \|x'\|$ bereits die Äquivalenz der Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|_\sigma$ implizierte. Letzteres stände im Widerspruch zur Aussage von (c).

(e) Da die einseitige Abschätzung $\|x'\|_\sigma \le \|x'\|$ gilt, beide Normen aber nach (c) nicht äquivalent sind, gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x'_n \in S_{X'}$ mit $\|x'_n\|_\sigma \le 1/n$. Nach Theorem 1 gilt daher $x'_n \overset{*}{\rightharpoonup} 0$. $\square$

Die Aussage (e) des Korollars gilt übrigens grundsätzlich, auch wenn wir die Voraussetzung der Separabilität an X fallen lassen. Dies zeigt der tiefliegende *Satz von Josefson-Nissenzweig* aus dem Jahre 1975, vgl. Diestel [2, Kapitel XII]. Im hier betrachteten Falle separabler Räume ließe sich eine Folge (x'_n) mit den gewünschten Eigenschaften alternativ auch mit Hilfe des Satzes von Hahn-Banach konstruieren: Es seien $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ endlichdimensionale Unterräume, deren lineare Hülle dicht in X liegt. Nun wähle man $x'_n \in S_{X'}$ mit $x'_n|_{E_n} = 0$.

2. Der Satz von Krein-Milman

Wir rufen kurz einige Begriffe ins Gedächtnis. Es sei $M \subset X$ Teilmenge eines Vektorraums X. Ein Punkt $x \in M$ heisst *Extremalpunkt* der Menge M, wenn aus $x = \lambda y + (1-\lambda)z$ mit $\lambda \in]0,1[$ und $y, z \in M$ stets $x = y = z$ folgt. Die Menge aller Extremalpunkte von M bezeichnen wir mit $\operatorname{ex} M$.

Mit Hilfe des Satzes von Hahn-Banach und des Zorn'schen Lemmas lässt sich nun auf anderthalb Buchseiten wie bei Heuser [5, Satz 43.4] folgender Satz für *normierte* Räume beweisen.

[1] Elementare Beweise mit Hilfe des Satzes von Arzelà-Ascoli finden sich etwa bei Werner [9, Aufgabe III.5.18] oder Rudin [8, Theorem 11.29].

Theorem 2 (Krein-Milman). *Es sei K eine nichtleere, kompakte und konvexe Teilmenge des normierten Raums X und $\operatorname{ex} K$ die Menge ihrer Extremalpunkte. Dann ist*

$$\operatorname{ex} K \neq \emptyset, \qquad K = \overline{\operatorname{conv}}\ \operatorname{ex} K.$$

In dieser Form scheint der Satz keine interessanten Anwendungen zu besitzen, gibt es doch in den klassischen normierten Räumen unendlicher Dimension kaum interessante kompakte Mengen. Interessante kompakte Mengen liefert erst der Satz von Alaoglu – kompakt in der schwach*-Topologie, welche sich leider nur im Rahmen lokalkonvexer Räume behandeln lässt. Deshalb wird der Satz von Krein-Milman meist für lokalkonvexe Räume formuliert und bewiesen, so auch bei Heuser [5, Abschnitt 66], 104 Seiten nach der Version für normierte Räume.

Die unkonventionellen Normen auf X' des vorangegangenen Abschnitts erlauben jedoch, unmittelbar im Rahmen normierter Räume zu einer für die Anwendungen interessanten Variante des Satzes zu gelangen.

Korollar 2. *Es sei X ein separabler normierter Raum und K eine nichtleere, beschränkte, konvexe und schwach*-folgenkompakte Teilmenge des Dualraums X'. Dann ist*

$$\operatorname{ex} K \neq \emptyset, \qquad K = \overline{\operatorname{conv}}^{\sigma}\ \operatorname{ex} K,$$

wobei der σ-Abschluss im Sinne der schwach-Folgenabgeschlossenheit zu verstehen ist. Speziell erhalten wir*

$$\operatorname{ex} B_{X'} \neq \emptyset, \qquad B_{X'} = \overline{\operatorname{conv}}^{\sigma}\ \operatorname{ex} B_{X'}.$$

Beweis. Wir wählen eine Norm $\|\cdot\|_\sigma$ für X' wie in Lemma 1. Korollar 1 zufolge ist K kompakt bezüglich dieser Norm. Nach dem Satz von Krein-Milman für normierte Räume gilt daher

$$K = \overline{\operatorname{conv}}^{\|\cdot\|_\sigma}\ \operatorname{ex} K, \qquad \operatorname{ex} K \neq 0.$$

Da es sich um beschränkte Mengen in X' handelt, fällt nach Theorem 1 der Abschluss in der $\|\cdot\|_\sigma$-Norm mit dem schwach*-Folgenabschluss zusammen. Schließlich erfüllt die Menge $K = B_{(X',\|\cdot\|)}$ die nötigen Voraussetzungen, wie in Korollar 1 gezeigt wurde. □

Damit steht die Tür zu interessanten Anwendungen weit offen. Aus der Fülle der Möglichkeiten greifen wir zwei heraus.

Beispiel 1. Es sei X ein separabler Banachraum, für welchen $\operatorname{ex} B_X = \emptyset$ gilt. *Dann kann X zu keinem Dualraum eines normierten Raums isometrisch isomorph sein.* Wäre nämlich $X = Y'$, so wäre Y ebenfalls separabel und deshalb nach Korollar 2 $\operatorname{ex} B_X \neq \emptyset$ im Widerspruch zur Annahme. Beispiele separabler Räume mit der Eigenschaft $\operatorname{ex} B_X = \emptyset$ sind etwa c_0 und $L^1[0,1]$ [9, p. 350], oder $K(\ell^2)$ [9, Aufgabe VIII.6.24].

Beispiel 2. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ eine offene Teilmenge. Dann ist $L^1(\Omega)$ separabel und daher Korollar 2 auf $L^\infty(\Omega) = (L^1(\Omega))'$ anwendbar. Indem man wortwörtlich dem üblichen Beweis [9, Satz VIII.4.8] folgt, lässt sich aus dieser Anwendbarkeit des Satzes von Krein-Milman nun der *Satz von Ljapunov* beweisen: *Sind* $f_1, \ldots, f_n \in L^1(\Omega)$*, so ist die Menge*

$$K = \left\{ \left(\int_E f_1(x)\,dx, \ldots, \int_E f_n(x)\,dx \right) : E \subset \Omega \textit{ messbar} \right\} \subset \mathbb{R}^n$$

kompakt und konvex. Dieser Satz steht in einem äußerst engen Zusammenhang mit dem „Bang-Bang-Prinzip“ der linearen Optimalsteuerung [4, Theorem 8.2]. Unser Zugang zum Satz von Krein-Milman ermöglicht daher, in einer Einführung in die lineare Funktionalanalysis diese interessante Anwendung ohne Rückgriff auf die Theorie lokalkonvexer Räume anzusprechen.

3. Das Lemma von Schur

Da in reflexiven Räumen die schwache Konvergenz und die schwach*-Konvergenz zusammenfallen, übertragen sich in diesen Räumen unsere bisherigen Resultate natürlich auf schwach konvergente Folgen.

Andererseits besagt nun aber eines der vielen nach Schur benannten Lemmata, dass in nichtreflexiven Räumen komplett andere Strukturen vorliegen können. Speziell zeigt sich, dass Teil (e) des Korollars 1 für die schwache Konvergenz von Folgen in ℓ^1 falsch sein muss, da diese mit der Konvergenz in der Norm zusammenfällt. Dieses fundamentale Resultat lässt sich eigentümlicherweise mit Hilfe der in Abschnitt 1 eingeführten Familie von Normen recht elementar beweisen. Einzige weitere Hilfsmittel sind die Separabilität von ℓ^1, die Dualität $\ell^\infty = (\ell^1)'$ und der Baire'sche Kategoriensatz.

Theorem 3 (Lemma von Schur). *Eine Folge in ℓ^1 konvergiert genau dann schwach, wenn sie in der Norm konvergiert.*

Beweis.[2] Da aus der Konvergenz in der Norm sofort die schwache Konvergenz folgt, brauchen wir nur die Umkehrung zu zeigen. Zur Vorbereitung bemerken wir, dass ℓ^1 separabel ist und der Dualraum $\ell^\infty = (\ell^1)'$ nach Lemma 1 und Korollar 1 durch

$$\|x'\|_\sigma = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} |x'(k)|, \qquad x' \in \ell^\infty,$$

so normierbar ist, dass die Einheitskugel $B_{(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)}$ kompakt in $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\sigma)$ ist. Dabei bezeichnet $x'(k)$ die $k$te Komponente der Folge $x' \in \ell^\infty$.

Es sei nun eine Folge (x_n) in ℓ^1 gegeben, für welche $x_n \rightharpoonup 0$ gilt. Wir definieren

$$F_k = \{x' \in B_{(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)} : |x'(x_n)| \le \epsilon/3 \quad \forall n \ge k\}$$

[2] Der hier geführte elementare Beweis überträgt die von Holmes [6, §18.C] im Rahmen der Theorie lokalkonvexer Räume angegebene Argumentation.

und bemerken, dass F_k schwach*-folgenabgeschlossen ist, also nach Theorem 1 auch in der $\|\cdot\|_\sigma$-Norm abgeschlossen ist. Wegen $x_n \rightharpoonup 0$ gilt

$$B_{(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)} = \bigcup_k F_k.$$

Aus dem Baire'schen Kategoriensatz schließen wir daher auf die Existenz eines Index k_0, so dass F_{k_0} einen inneren Punkt $x_0' \in B_{(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)}$ bezüglich der $\|\cdot\|_\sigma$-Normtopologie besitzt. Anders ausgedrückt gibt es ein $\delta > 0$, so dass für $x' \in B_{(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)}$ gilt

$$\|x' - x_0'\|_\sigma \leq \delta \ \Rightarrow \ x' \in F_{k_0}.$$

Wir wählen $N \in \mathbb{N}$ und mit Hilfe der vorausgesetzten schwachen Konvergenz ein $n_0 \geq k_0$ so, dass für alle $n \geq n_0$ gilt

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} 2^{-k} \leq \delta/2, \qquad \sum_{k=1}^{N} |x_n(k)| \leq \epsilon/3.$$

Für ein festes $n \geq n_0$ definieren wir $x_n' \in B_{(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)}$ durch

$$x_n'(k) = \begin{cases} x_0'(k) & 1 \leq k \leq N, \\ \operatorname{sign} x_n(k) & k > N. \end{cases}$$

Dann ist

$$\|x_n' - x_0'\|_\sigma = \sum_{k=N+1}^{\infty} 2^{-k} |x_n'(k) - x_0'(k)| \leq 2 \sum_{k=N+1}^{\infty} 2^{-k} \leq \delta,$$

und daher $x_n' \in F_{k_0}$. Wegen $n \geq k_0$ folgt hieraus

$$\left| \sum_{k=1}^{N} x_0'(k) x_n(k) + \sum_{k=N+1}^{\infty} |x_n(k)| \right| = |x_n'(x_n)| \leq \epsilon/3,$$

also erst recht aufgrund von $\|x_0'\|_\infty \leq 1$

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |x_n(k)| \leq \epsilon/3 + \sum_{k=1}^{N} |x_n(k)| \leq 2\epsilon/3.$$

Insgesamt haben wir so gezeigt, dass für $n \geq n_0$

$$\|x_n\|_{\ell^1} = \sum_{k=1}^{\infty} |x_n(k)| \leq \epsilon$$

gilt und daher $x_n \to 0$ in der $\|\cdot\|_{\ell^1}$-Norm konvergiert. $\square$

4. Charakterisierende Normen und kompakte Einbettungen

Die in Abschnitt 1 eingeführte Familie von Normen $\|\cdot\|_\sigma$ lässt sich vom Standpunkt des Operators $Id : (X', \|\cdot\|) \to (X', \|\cdot\|_\sigma)$ verallgemeinern. Diese Verallgemeinerung dient zwei Zwecken: Erstens werden wir verstehen, dass die Separabilität des Raums X für unsere Betrachtungen *notwendig* ist. Zweitens gelangen wir zu einer größeren Klasse von Normen, welche in vielen konkreten Fällen vertrauter sein dürfte und zu einfacheren Beweisen Anlass gibt. Zur Illustration diskutieren wir im nächsten Abschnitt, wie man mit unserer Methodik das verallgemeinerte Riemann-Lebesgue'sche Lemma beweist.

Ein Schlüssel zur Verallgemeinerung der Normen $\|\cdot\|_\sigma$ liegt in der Beobachtung, dass es sich bei dem nach Korollar 1 kompakten Operator $Id : (X', \|\cdot\|) \to (X', \|\cdot\|_\sigma)$ tatsächlich sogar um einen *adjungierten* Operator handelt. Dazu muss der Raum $(X', \|\cdot\|_\sigma)$, welcher ja im allgemeinen als nichtvollständiger Raum kein Dualraum sein kann, in geeigneter Weise zu einem Dualraum ergänzt werden. Wir stellen fest, dass für die separierende Folge $\sigma = (x_k)$ der Operator

$$S : (X', \|\cdot\|_\sigma) \to \ell^1 = c_0', \quad x' \mapsto (2^{-k} x'(x_k)),$$

isometrisch ist. Das nächste Lemma zeigt nun, dass der Operator $S \circ Id : (X', \|\cdot\|) \to c_0'$ ein kompakter, injektiver und adjungierter Operator ist. Wir werden dabei den Beweis der Kompaktheit und Injektivität unabhängig von den Resultaten des Abschnitts 1 führen.

Lemma 2. *Es sei X ein separabler normierter Raum und $\sigma = (x_k)$ eine separierende Folge in S_X. Dann definiert*

$$T_\sigma : (t_k) \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} t_k x_k$$

einen linearen Operator $T_\sigma : c_0 \to X$. Der Operator T_σ ist kompakt, erfüllt $\|T_\sigma\| \le 1$ und hat dichtes Bild. Der adjungierte Operator ist durch

$$T_\sigma' : X' \to \ell^1 = c_0', \qquad x' \mapsto (2^{-k} x'(x_k)),$$

gegeben, ist kompakt, injektiv und erfüllt $\|T_\sigma'\| \le 1$.

Beweis. Für $y = (t_k) \in c_0$ gilt

$$\|T_\sigma y\| \le \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} |t_k| \|x_k\| \le \|y\|_\infty \cdot \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = \|y\|_\infty.$$

Also ist T_σ wohldefiniert und es gilt $\|T_\sigma\| = \|T_\sigma'\| \le 1$. Genauso zeigt man für den Operator endlichen Rangs

$$T_\sigma^N : c_0 \to \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_N\} \subset X, \qquad (t_k) \mapsto \sum_{k=1}^{N} 2^{-k} t_k x_k,$$

die Abschätzung

$$\|T_\sigma y - T_\sigma^N y\| \leq \|y\|_\infty \cdot \sum_{k=N+1}^{\infty} 2^{-k} = 2^{-N}\|y\|_\infty,$$

d.h. $\|T_\sigma - T_\sigma^N\| \leq 2^{-N} \to 0$ für $N \to \infty$. Damit ist T_σ als Limes von Operatoren endlichen Rangs kompakt. Nach dem Satz von Schauder ist auch der adjungierte Operator T'_σ kompakt.

Es seien nun $x \in X$ und $\epsilon > 0$ beliebig gegeben. Da $\operatorname{span}\sigma$ dicht in X liegt, gibt es eine *abbrechende* Nullfolge $y^* = (t_k^*) \in c_0$, so dass gilt

$$\left\| x - \sum_k t_k^* x_k \right\| \leq \epsilon.$$

Setzen wir $y = (2^k t_k^*) \in c_0$, so lautet diese Abschätzung aber gerade

$$\|x - T_\sigma y\| \leq \epsilon,$$

womit die Dichtigkeit des Bilds von T_σ gezeigt wäre. Hieraus folgt nach einem allgemeinen Resultat [9, Satz III.4.5] die Injektivität des adjungierten Operators T'_σ. Die konkrete Gestalt des Operators T'_σ folgt unmittelbar aus der Identifikation $c'_0 = \ell^1$. $\square$

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun zeigen, dass separable normierte Räume durch genau solche Operatoren charakterisiert werden und dass so die schwach*-Konvergenz beschränkter Folgen in eine Normkonvergenz transformiert wird.

Theorem 4. *Es sei X ein normierter Raum.*

(a) X ist genau dann separabel, wenn es einen normierten Raum Y und einen kompakten linearen Operator $T : Y \to X$ mit dichtem Bild gibt.
(b) Ist T ein solcher Operator und (x'_n) eine beschränkte Folge in X', so konvergiert $x'_n \xrightarrow{*} x'$ in X' genau dann, wenn $T'x'_n \to T'x'$ in Y' konvergiert.

Beweis. (a) Lemma 2 zeigt für separable Räume X die Existenz eines derartigen kompakten Operators $T_\sigma : c_0 \to X$. Ist hingegen ein solcher kompakter Operator gegeben, so gilt wegen des dichten Bildes $X = \overline{\operatorname{span}}\, T(B_Y)$. Da T kompakt ist, ist $\overline{T(B_Y)}$ kompakt und daher separabel. Somit gibt es eine abzählbare Menge A, so dass $\overline{T(B_Y)} = \overline{A}$. Also gilt erst recht $X = \overline{\operatorname{span}}\, A$, d.h. X ist separabel.

(b) Wir bemerken, dass aus dem Satz von Schauder folgt, dass auch T' kompakt ist. Ohne Einschränkung dürfen wir $x' = 0$ annehmen. Es sei zunächst $x'_n \xrightarrow{*} 0$. Aus der Beschränktheit der Folge (x'_n) und der Kompaktheit von T' schließen wir auf eine Teilfolge (x'_{n_j}), für welche $T'x'_{n_j} \to y'$ konvergiert. Es sei nun $y \in Y$ beliebig gewählt. Dann folgt einerseits aus $x'_n \xrightarrow{*} 0$

$$T'x'_{n_j}(y) = x'_{n_j}(Ty) \to 0,$$

andererseits aus $T'x'_{n_j} \to y'$

$$T'x'_{n_j}(y) \to y'(y).$$

Also ist $y'(y) = 0$ für alle $y \in Y$ und damit $y' = 0$. Da dieser Grenzwert eindeutig ist, dürfen wir auf die Teilfolgenauswahl verzichten und haben $T'x'_n \to 0$ gezeigt.

Es konvergiere nun $T'x'_n \to 0$. Für $x = Ty \in \operatorname{range} T$ gilt daher

$$x'_n(x) = x'_n(Ty) = T'x'_n(y) \to 0.$$

Da das Bild von T dicht in X liegt, folgt aus der Beschränktheit der Folge (x'_n), dass sogar $x'_n(x) \to 0$ für alle $x \in X$ konvergiert, also gilt $x'_n \overset{*}{\rightharpoonup} 0$. $\square$

Nun können wir die Ergebnisse aus Abschnitt 1 verallgemeinern.

Korollar 3. *Es sei X ein separabler normierter Raum und $T : Y \to X$ ein kompakter Operator mit dichtem Bild, so definiert*

$$\|x'\|_T = \|T'x'\|, \qquad x' \in X',$$

eine Norm auf X'.

(a) Ist σ eine separierende Folge in S_X, so gilt $\|x'\|_\sigma = \|x'\|_{T_\sigma}$, $x' \in X'$.
(b) Für jedes $x' \in X'$ gilt die Abschätzung $\|x'\|_T \leq \|T\| \cdot \|x'\|$.
(c) Für eine $\|\cdot\|$-beschränkte Folge (x'_n) in X' konvergiert $x'_n \overset{*}{\rightharpoonup} x'$ genau dann, wenn $\|x'_n - x'\|_T \to 0$.
(d) Eine $\|\cdot\|$-beschränkte Menge $K \subset X'$ ist genau dann schwach-folgenkompakt, wenn sie kompakt ist bezüglich der $\|\cdot\|_T$-Norm.*
(e) Die Einheitskugel $B_{(X',\|\cdot\|)}$ ist kompakt in $(X', \|\cdot\|_T)$.
(f) Für $\dim X = \infty$ sind die Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|_T$ auf X' nicht äquivalent.
(g) Ist $\dim X = \infty$, so ist $(X', \|\cdot\|_T)$ nicht vollständig.

Beweis. Es handelt sich um eine Norm, da aus der Dichtigkeit des Bildes von T folgt, dass T' injektiv ist. Theorem 4 zeigt die Behauptungen (a)-(c). Die Behauptungen (d)-(g) lassen sich nun wortwörtlich wie ihre Entsprechungen für die $\|\cdot\|_\sigma$-Normen in Korollar 1 beweisen. $\square$

Beispiel 3. Wir betrachten den Raum $X = L^1(\Omega)$ für ein beschränkte offene Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Der Satz von Rellich liefert die kompakte Einbettung

$$T : H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega).$$

Sie hat dichtes Bild, so dass der adjungierte Operator

$$T' : L^\infty(\Omega) = (L^1(\Omega))' \;\to\; H^{-1}(\Omega) = (H_0^1(\Omega))'$$

kompakt und injektiv ist. Die üblichen Identifikation lokal integrabler Funktionen mit Distributionen zeigt, dass $L^\infty(\Omega)$ auf diese Weise als Teilraum von $H^{-1}(\Omega)$ aufgefasst werden kann. Wir erhalten also die kompakte Einbettung

$$T' : L^\infty(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$$

und daher $\|f\|_T = \|f\|_{H^{-1}}$ für $f \in L^\infty(\Omega)$. Zusammengefasst liefert uns Korollar 3 das folgende Resultat:

Lemma 3. *Eine beschränkte Folge in $L^\infty(\Omega)$ ist genau dann schwach*-konvergent in $L^\infty(\Omega)$, wenn sie in $H^{-1}(\Omega)$ bezüglich der Norm konvergiert.*

5. Eine Verallgemeinerung des Riemann-Lebesgue'schen Lemmas

Wir knüpfen an das letzte Beispiel an und wollen zunächst das klassische *Riemann-Lebesgue'sche Lemma* [8, Absatz 5.14] herleiten. Dazu betrachten wir für $\epsilon \neq 0$ die Funktionen $e_\epsilon(x) = \exp(ix/\epsilon)$ in $L^\infty[0, 2\pi]$. Es gilt

$$e_\epsilon(x) = -i\epsilon\, e'_\epsilon(x), \qquad \|e_\epsilon\|_\infty = 1,$$

und daher mit Hilfe der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung

$$\begin{aligned} \|e_\epsilon\|_{H^{-1}} &= \sup_{\phi \in H_0^1(0,2\pi)} \frac{\left|\int_0^{2\pi} e_\epsilon(x)\phi(x)\,dx\right|}{\|\phi\|_{H^1}} \\ &= |\epsilon| \cdot \sup_{\phi \in H_0^1(0,2\pi)} \frac{\left|\int_0^{2\pi} e_\epsilon(x)\phi'(x)\,dx\right|}{\|\phi\|_{H^1}} \\ &\leq |\epsilon| \cdot \|e_\epsilon\|_{L^2} = |\epsilon|\sqrt{2\pi}. \end{aligned}$$

Das Beispiel des letzten Abschnitts zeigt, dass wir hieraus für eine Folge $\epsilon \to 0$ die Konvergenz

$$e_\epsilon \stackrel{*}{\rightharpoonup} 0$$

erhalten. Genau dies besagt das Riemann-Lebesgue'sche Lemma.

Wir verallgemeinern jetzt dieses Resultat, indem wir für eine beliebige Funktion $f \in L^\infty(0, 2\pi)$, welche wir uns 2π-periodisch fortgesetzt denken, und $\epsilon \neq 0$ die Funktionen

$$f_\epsilon(x) = f(x/\epsilon), \qquad \|f_\epsilon\|_\infty = \|f\|_\infty$$

betrachten. In $L^2(0, 2\pi)$ konvergiert die Fourierreihe

$$f_\epsilon(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\, e^{ikx/\epsilon} = c_0 + \sum_{k\in\mathbb{Z}, k\neq 0} c_k\, e_{\epsilon/k}(x)$$

mit den Fourierkoeffizienten c_k der Funktion f. Mit obiger Abschätzung für $\|e_\epsilon\|_{H^{-1}}$ erhalten wir mit Hilfe der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung und der Parseval'schen Gleichung

$$\begin{aligned} \|f_\epsilon - c_0\|_{H^{-1}} &\leq |\epsilon|\sqrt{2\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}, k\neq 0} \frac{|c_k|}{|k|} \leq |\epsilon|\sqrt{2\pi} \cdot \|(c_k)\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} \cdot \sqrt{2\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2}} \\ &= \frac{|\epsilon|\pi\sqrt{3}}{3}\|f\|_{L^2} \leq \frac{|\epsilon|\pi\sqrt{6\pi}}{3}\|f\|_{L^\infty}. \end{aligned}$$

Beachten wir die Formel für den Fourier-Koeffizienten c_0, so gelangen wir mit Lemma 3 zu folgender Verallgemeinerung des Riemann-Lebesgue'schen Lemmas:

Lemma 4 ([1, Lemma I.1.2]). *Sei $f \in L^\infty(0, 2\pi)$ periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt. Dann konvergiert*

$$f(\nu x) \stackrel{*}{\rightharpoonup} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$$

in $L^\infty(0, 2\pi)$ für $\nu \to \infty$.

6. Gibt es eine kanonische charakterisierende Norm?

Wir stellen uns nun die Frage, ob die neuartigen Normierungen von X' irgendeine gemeinsame Struktur offenbaren, welche über die Charakterisierung der schwach*-Konvergenz beschränkter Folgen hinausginge. Gibt es gar unter den vorgestellten Exemplaren eine ausgezeichnete, kanonische Norm? Der nächste Satz beantwortet diese Frage für eine wichtige Klasse separabler Räume im wesentlichen negativ.

Theorem 5. *Gegeben sei ein unendlichdimensionaler normierter Raum X mit einer normierten Schauderbasis $\sigma = (x_k)$. Dann gibt es eine Permutation $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so dass für die separierende Folge $\tau = (x_{\phi(k)})$ die Normen $\|\cdot\|_\sigma$ und $\|\cdot\|_\tau$ nicht äquivalent sind.*

Beweis. Die ein-eindeutige Vorschrift $\phi(2n) = 2^n$ lässt sich zu einer Permutation $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ fortsetzen, da $\mathbb{N} \setminus \{2^1, 2^2, 2^3, \dots\}$ und die ungeraden Zahlen gleichmächtig sind. Für die Koeffizientenfunktionale x_i' der Schauderbasis gilt

$$x_i'(x_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots .$$

Würde nun für ein gewisses $M > 0$ die Abschätzung $\|x'\|_\tau \leq M\|x'\|_\sigma$ für alle $x' \in X'$ gelten, so hätten wir für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$2^{-2n} = 2^{-2n}|x'_{2^n}(x_{\phi(2n)})| = \|x'_{2^n}\|_\tau \leq M\|x'_{2^n}\|_\sigma = M \cdot 2^{-2^n},$$

welche aber für hinreichend großes n falsch wird. $\square$

Man könnte nun auf die Idee kommen, eine Unabhängigkeit von der gewählten separierenden Folge dadurch herzustellen, dass man das Supremum über alle Normen $\|\cdot\|_\sigma$ betrachtet. Wie man sofort sieht, liefert diese Konstruktion wieder eine Norm auf X'. Tatsächlich zeigt sich aber, dass man auf diese Weise nur die Operatornorm auf X' rekonstruiert hat.

Theorem 6. *Es sei X ein separabler normierter Raum. $\Sigma(X)$ bezeichne die Menge der separierenden Folgen in S_X. Ferner sei eine Folge $\sigma_* \in \Sigma(X)$ gegeben, welche sogar dicht in S_X liegt. Für alle $x' \in X'$ gilt nun*

$$\|x'\| = \sup_{\sigma \in \Sigma(X)} \|x'\|_\sigma = \sup_{\sigma \text{ Teilfolge von } \sigma_*} \|x'\|_\sigma.$$

Beweis. Aus der Abschätzung (a) in Theorem 1 folgt sofort

$$\sup_{\sigma \text{ Teilfolge von } \sigma_*} \|x'\|_\sigma \leq \sup_{\sigma \in \Sigma(X)} \|x'\|_\sigma \leq \|x'\|,$$

so dass es reicht, $\|x'\|$ nach oben durch das Supremum über die Teilfolgen von σ_* abzuschätzen. Da σ_* dicht in S_X liegt, gibt es für gegebenes $0 \neq x' \in X'$, $\epsilon > 0$ und $x \in S_X$ eine Teilfolge $\sigma_\epsilon = (x_k)$ von σ_*, so dass

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \|x_k - x\| \leq \epsilon / \|x'\|.$$

Also ist

$$
\begin{aligned}
\left| \|x'\|_{\sigma_\epsilon} - |x'(x)| \right| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} |x'(x_k)| - \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} |x'(x)| \right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} |x'(x_k - x)| \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} \|x_k - x\| \cdot \|x'\| \leq \epsilon
\end{aligned}
$$

und daher

$$
\|x'\| = \sup_{x \in S_X} |x'(x)| \leq \sup_{\sigma \text{ Teilfolge von } \sigma_*} \|x'\|_\sigma + \epsilon.
$$

Da ϵ beliebig war, gilt die Behauptung. □

Anmerkungen

Statt der Normen im Abschnitt 1 kann man allgemeiner für $1 \leq p < \infty$ Normen der Gestalt

$$
\|x'\|_{\sigma,p} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} |x'(x_k)|^p \right)^{1/p}
$$

betrachten. Für jede solche Norm behalten die Ergebnisse aus Abschnitt 1 ihre Richtigkeit. In der Interpretation des Abschnitts 4 gehören diese Normen zu den kompakten Einbettungen

$$
T'_\sigma : X' \to Y' = \ell^p, \qquad x' \mapsto (2^{-k/p} x'(x_k)).
$$

Insbesondere ist $(X', \|\cdot\|_{\sigma,2})$ dann ein *Prähilbertraum*. Da wir hiervon in unserer Arbeit keinen vereinfachenden Gebrauch machen konnten, haben wir auf diese Allgemeinheit verzichtet und uns auf den Fall $\|\cdot\|_\sigma = \|\cdot\|_{\sigma,1}$ beschränkt.

Es erscheint aber, dass das Wissen um die $\|\cdot\|_{\sigma,2}$-Norm zur „Folklore“ der Funktionalanalysis gehört. So zeigt etwa Rosenthal [7, p. 8] durch ihre implizite Verwendung, dass jede metrisierbare kompakte konvexe Menge affin homöomorph zu einer normkompakten konvexen Menge eines Hilbertraums ist. Andere, explizite Literaturstellen sind dem Autor leider nicht bekannt.

Danksagung. Der Autor dankt Dirk Werner für die Durchsicht einer Erstfassung des Manuskripts. Seine wertvollen Vorschläge haben insbesondere die Darstellung von Abschnitt 6 wesentlich verbessert. Von ihm stammt auch der Hinweis auf die Arbeit von Rosenthal.

Literatur

1. Bernard Dacorogna. *Weak Continuity and Weak Lower Semicontinuity of Non-Linear Functionals*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1982.
2. Joseph Diestel. *Sequences and Series in Banach Spaces*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1984.
3. Nelson Dunford und Jacob T. Schwartz. *Linear Operators. Part I: General Theory*. Interscience Publishers Inc., New York, London, 1958.

4. Henry Hermes und Joseph P. LaSalle. *Functional Analysis and Time Optimal Control*. Academic Press, New York, London, 1969.
5. Harro Heuser. *Funktionalanalysis. Theorie und Anwendung*. B. G. Teubner, Stuttgart, 2. Auflage, 1986.
6. Richard B. Holmes. *Geometric Functional Analysis and its Applications*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1975.
7. Haskell P. Rosenthal. On the Choquet representation theorem. In: E. W. Odell und H. P. Rosenthal (Hrsg.), *Functional Analysis. Proceedings, The University of Texas at Austin 1986-1987*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1988.
8. Walter Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, New York, 3. Auflage, 1987.
9. Dirk Werner. *Funktionalanalysis*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2. Auflage, 1997.