ZUR EINDEUTIGKEIT DER VISKOSITÄTSLÖSUNGEN BEIM CAUCHY-PROBLEM VON HAMILTON-JACOBI-GLEICHUNGEN

FOLKMAR BORNEMANN

Zusammenfassung. Wir beweisen Fall (iii) des Eindeutigkeitssatzes [1, Theorem V.2] aus der Originalpublikation von M. G. Crandall und P.-L. Lions. Unser Beweis lehnt sich stark an die durchsichtigere Argumentation in dem Buch [2, §10.2,Theorem 1] von L. C. Evans an. Wir mußten aber von den Voraussetzungen seiner Formulierung abweichen, um später auf die Eindeutigkeit der durch die Lax-Hopf-Formel [2, §10.3,Theorem 3] gegebenen Lösung schließen zu können.

Satz. *Gegeben sei eine Hamiltonfunktion H auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, welche gleichmäßig stetig für beschränktes erstes Argument ist. Es seien u und $\tilde{u}$ beschränkte, Lipschitz-stetige Viskositätslösungen der Hamilton-Jacobi-Gleichung*

$$u_t + H(\nabla_x u, x) = 0 \qquad \textit{auf} \quad \mathbb{R}^n \times [0,T].$$

Dann gilt mit der Abkürzung $u_0 = u(\cdot,0)$ und $\tilde{u}_0 = \tilde{u}(\cdot,0)$

$$\sup_{\mathbb{R}^n \times [0,T]} (u - \tilde{u}) = \sup_{\mathbb{R}^n} (u_0 - \tilde{u}_0).$$

Beweis. I. Wir setzen

$$\sup_{\mathbb{R}^n \times [0,T]} (u - \tilde{u}) = \sup_{\mathbb{R}^n} (u_0 - \tilde{u}_0) + \sigma$$

und führen die Annahme $\sigma > 0$ zum Widerspruch.

II. Für $0 < \epsilon, \lambda < 1$ definieren wir auf $\mathbb{R}^{2n} \times [0,T]^2$ die Hilfsfunktion

$$\begin{aligned}\Phi(x,y,t,s) &= u(x,t) - \tilde{u}(y,s) \\ &\qquad - \epsilon^{-2}(|x-y|^2 + (t-s)^2) - \epsilon^2(|x|^2 + |y|^2) - \lambda(t+s)\end{aligned}$$

Wegen des Strafterms $-\epsilon^2(|x|^2 + |y|^2)$ für die Größe von x und y gibt es einen Punkt $(x_0, y_0, t_0, y_0) \in \mathbb{R}^{2n} \times [0,T]^2$ mit

$$\Phi(x_0, y_0, t_0, s_0) = \max_{\mathbb{R}^{2n} \times [0,T]^2} \Phi(x,y,t,s). \tag{1}$$

III. Weiter unten werden wir zeigen, daß

$$|x_0| + |y_0| = O(\epsilon^{-1}), \qquad |x_0 - y_0| + |t_0 - s_0| = O(\epsilon^2) \qquad \text{für } \epsilon \to 0. \tag{2}$$

IV. Ferner werden wir weiter unten zeigen, daß für hinreichend kleines λ und ϵ aus $\sigma > 0$ folgt $t_0 \neq 0$ und $s_0 \neq 0$, also die Positivität $t_0 > 0$ und $s_0 > 0$.

V. Aufgrund von (1) hat die Abbildung $(x,t) \mapsto \Phi(x, y_0, t, s_0)$ ein Maximum am Punkt (x_0, t_0). Wegen der Definition von Φ heißt dies, daß gilt:

$$u - v \text{ hat ein Maximum bei } (x_0, t_0)$$

mit der Testfunktion

$$v(x,t) = \tilde{u}(y_0, s_0) + \epsilon^{-2}(|x - y_0|^2 + (t - s_0)^2) + \epsilon^2(|x|^2 + |y_0|^2) + \lambda(t + s_0).$$

Da u Viskositätslösung der Hamilton-Jacobi-Gleichung ist und Schritt IV die Positivität $t_0 > 0$ garantiert, muß gelten

$$v_t(x_0, t_0) + H(\nabla_x v(x_0, t_0), x_0) \leq 0.$$

Ausgeschrieben lautet diese Ungleichung

$$\lambda + 2\epsilon^{-2}(t_0 - s_0) + H\left(2\epsilon^{-2}(x_0 - y_0) + 2\epsilon^2 x_0, x_0\right) \leq 0. \tag{3}$$

VI. Analog besitzt die Abbildung $(y,s) \mapsto -\Phi(x_0, y, t_0, s)$ ein Minimum am Punkt (y_0, s_0). Wegen der Definition von Φ heißt dies, daß gilt:

$$\tilde{u} - \tilde{v} \text{ hat ein Minimum bei } (y_0, s_0)$$

mit der Testfunktion

$$\tilde{v}(y,s) = u(x_0, t_0) - \epsilon^{-2}(|x_0 - y|^2 + (t_0 - s)^2) - \epsilon^2(|x_0|^2 + |y|^2) - \lambda(t_0 + s).$$

Da $\tilde{u}$ Viskositätslösung der Hamilton-Jacobi-Gleichung und Schritt IV die Positivität $s_0 > 0$ garantiert, muß gelten

$$\tilde{v}_s(y_0, s_0) + H(\nabla_y \tilde{v}(y_0, s_0), y_0) \geq 0.$$

Ausgeschrieben lautet diese Ungleichung

$$-\lambda + 2\epsilon^{-2}(t_0 - s_0) + H\left(2\epsilon^{-2}(x_0 - y_0) - 2\epsilon^2 y_0, y_0\right) \geq 0. \tag{4}$$

VII. Subtraktion der Ungleichung (4) von (3) liefert nun

$$2\lambda \leq H\left(2\epsilon^{-2}(x_0 - y_0) - 2\epsilon^2 y_0, y_0\right) - H\left(2\epsilon^{-2}(x_0 - y_0) + 2\epsilon^2 x_0, x_0\right).$$

Die Abschätzungen (2) zeigen, daß die jeweils ersten Argumente von H auf der rechten Seite aus beschränkten Mengen stammen. Also gibt es nach Voraussetzung an H einen Stetigkeitsmodul ω, so daß

$$0 < 2\lambda \leq \omega\left(2\epsilon^2(|x_0| + |y_0|) + |x_0 - y_0|\right) = \omega(O(\epsilon)).$$

Somit erhalten wir im Limes $\epsilon \to 0$ den gewünschten Widerspruch

$$0 < \lambda \leq 0.$$

VIII. Die triviale Ungleichung $\Phi(x_0, y_0, t_0, s_0) \geq \Phi(0,0,0,0)$, also

$$\begin{aligned} \epsilon^{-2}(|x_0 - y_0|^2 + (t_0 - s_0)^2) + \epsilon^2(|x_0|^2 + |y_0|^2) + \lambda(t_0 + s_0) \\ \leq u(x_0, t_0) - \tilde{u}(y_0, s_0) - u(0,0) + \tilde{u}(0,0), \end{aligned}$$

hat wegen der Beschränktheit von u und $\tilde{u}$ sofort

$$|x_0 - y_0| + |t_0 - s_0| = O(\epsilon), \qquad |x_0| + |y_0| = O(\epsilon^{-1}),$$

für $\epsilon \to 0$ zur Folge. Damit ist insbesondere die erste der beiden Abschätzungen in (2) gezeigt.

IX. Aus (1) folgt trivialerweise sofort $\Phi(x_0, y_0, t_0, s_0) \geq \Phi(x_0, x_0, t_0, t_0)$, also

$$u(x_0,t_0) - \tilde{u}(y_0,s_0) - \epsilon^{-2}(|x_0-y_0|^2 + (t_0-s_0)^2) - \epsilon^2(|x_0|^2+|y_0|^2) \\ -\lambda(t_0+s_0) \geq u(x_0,t_0) - \tilde{u}(x_0,t_0) - 2\epsilon^2|x_0|^2 - 2\lambda t_0.$$

Demnach gilt

$$\epsilon^{-2}(|x_0-y_0|^2 + (t_0-s_0)^2) \leq \tilde{u}(x_0,t_0) - \tilde{u}(y_0,s_0) + \lambda(t_0-s_0) \\ + \epsilon^2(|x_0|+|y_0|)\cdot(|x_0|-|y_0|).$$

Die Resultate aus Schritt VIII und die Lipschitz-Stetigkeit von $\tilde{u}$ liefern für ein gewisses $c > 0$

$$\epsilon^{-2}(|x_0-y_0|^2 + (t_0-s_0)^2) \leq c(|x_0-y_0|^2 + (t_0-s_0)^2)^{1/2},$$

und damit die zweite Abschätzung in (2).

X. Wählen wir $\epsilon, \lambda > 0$ hinreichend klein, so können wir

$$\Phi(x_0,y_0,t_0,s_0) \geq \max_{\mathbb{R}^n\times[0,T]} \Phi(x,x,t,t) \geq \sup_{\mathbb{R}^n}(u_0 - \tilde{u}_0) + \sigma/2$$

garantieren. Die Definition von Φ liefert daher für solche ϵ und λ

$$\begin{aligned} u_0(x_0) - \tilde{u}_0(x_0) + \sigma/2 &\leq \sup_{\mathbb{R}^n}(u_0-\tilde{u}_0) + \sigma/2 \leq \Phi(x_0,y_0,t_0,s_0) \\ &\leq u(x_0,t_0) - \tilde{u}(y_0,s_0) \\ &= u(x_0,t_0) - u(x_0,0) + u_0(x_0) - \tilde{u}_0(x_0) \\ &\quad + \tilde{u}(x_0,0) - \tilde{u}(x_0,t_0) + \tilde{u}(x_0,t_0) - \tilde{u}(y_0,s_0). \end{aligned}$$

Da $\tilde{u}$ Lipschitz-stetig ist, gibt es ein $c > 0$ mit

$$\tilde{u}(x_0,t_0) - \tilde{u}(y_0,s_0) \leq c(|x_0-y_0| + |t_0-s_0|) = O(\epsilon^2).$$

Zusammengefaßt gilt

$$\sigma/2 \leq u(x_0,t_0) - u(x_0,0) + \tilde{u}(x_0,0) - \tilde{u}(x_0,t_0) + O(\epsilon^2).$$

Wählen wir für $\sigma > 0$ nun ϵ so klein, daß $O(\epsilon^2) \leq \sigma/4$ gilt, so können wir auf

$$0 < \sigma/4 \leq u(x_0,t_0) - u(x_0,0) + \tilde{u}(x_0,0) - \tilde{u}(x_0,t_0)$$

schließen, was $t_0 \neq 0$ zur Folge hat. Völlig analog schließt man aus der Lipschitz-Stetigkeit von u auf $s_0 \neq 0$, womit die Behauptungen des Schritts IV bewiesen wären. $\square$

Literatur

[1] Michael G. Crandall and Pierre-Louis Lions, *Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **277** (1983), 1–42.

[2] Lawrence C. Evans, *Partial differential equations*, American Mathematical Society, Providence, 1998.