

# Die Maximalwinkelbedingung für Finite Elemente <sup>1</sup>

## 1. Die Minimalwinkelbedingung

Die Fehlerabschätzung der Finite-Elemente-Methode erhalten wir letztlich aus einer Interpolationsfehlerabschätzung. Diese soll hier genauer studiert werden. Wir beschränken uns auf *lineare Dreieckselemente* und wählen folgende *Notation*:

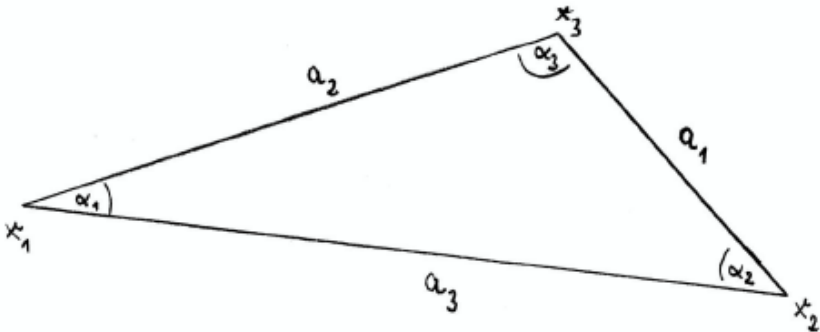


Abbildung 1: Dreiecksbezeichnungen

Ein beliebiges Dreieck  $T$  habe die Winkel  $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3$  mit den gegenüberliegenden Seiten (Längen)  $a_1 \leq a_2 \leq a_3$  (Sinussatz!). Den Durchmesser des Dreiecks (d.h. die längste Seite) bezeichnen wir auch mit  $h$ , den Durchmesser des Inkreises mit  $\rho$ . Für das *Referenzdreieck*

$$\hat{T} = \{\hat{x} \in \mathbb{R}^2 : \hat{x}_1, \hat{x}_2 \geq 0, \hat{x}_1 + \hat{x}_2 \leq 1\}$$

erhalten die entsprechenden Größen alle das diakritische Zeichen „^“ oben auf.

---

<sup>1</sup>©Folkmar A. Bornemann (Dezember 1993). Begleitmaterial zur Vorlesung „Finite-Elemente-Methoden“ im WiSe '93/'94 an der FU-Berlin.

Bezeichnen wir schließlich mit

$$\mathcal{I} : H^2(T) \rightarrow P_1(T)$$

den Knotenpunkt-Interpolationsoperator in die linearen Polynome, so lautet die einschlägige lokale Fehlerabschätzung wie folgt:

**Lemma 1.** *Es gibt eine absolute Konstante  $c > 0$ , so daß*

$$|u - \mathcal{I}u|_{H^1(T)} \leq c \frac{h^2}{\rho} |u|_{H^2(T)} \quad \forall u \in H^2(T).$$

In dieser Form geht die Abschätzung auf CIARLET und RAVIART [3] zurück. Wollen wir diese Abschätzung für Dreiecke aus einer Familie  $\mathcal{T}$  gleichmäßig nutzen und dabei den Durchmesser zur bestimmenden Größe machen, so kommt die *Verzerrung* oder das *Aspektverhältnis* des Dreieckes  $T$  ins Spiel,

$$\sigma = \frac{h}{\rho} \geq 1.$$

Die gleichmäßige Beschränkung der Aspektverhältnisse heißt *Zlámal-Bedingung*,

$$\sigma \leq \bar{\sigma} < \infty \quad \forall T \in \mathcal{T}. \quad (\text{Z})$$

Wir erhalten

**Korollar 2.** *Erfüllt die Familie  $\mathcal{T}$  von Dreiecken die Zlámal-Bedingung (Z), so gilt mit einer absoluten Konstanten  $c > 0$ , daß für jedes  $T \in \mathcal{T}$*

$$|u - \mathcal{I}u|_{H^1(T)} \leq c \bar{\sigma} h |u|_{H^2(T)} \quad \forall u \in H^2(T).$$

Für Dreiecke läßt sich das Aspektverhältnis  $\sigma$  durch den kleinsten Winkel  $\alpha_1$  beschreiben.

**Proposition 3.** *Es gilt*

$$\frac{1}{2} \cot \frac{\alpha_1}{2} \leq \sigma \leq \cot \frac{\alpha_1}{2}.$$

*Beweis.* Elementare trigonometrische Überlegungen ( $\rightarrow$  Übungsaufgabe) zeigen

$$\rho = (a_2 + a_3 - a_1) \tan \frac{\alpha_1}{2}.$$

Nun gilt aber

$$h = a_3 \leq a_2 + a_3 - a_1 \leq 2a_3 = 2h,$$

woraus die Behauptung folgt.  $\square$

Somit ist die Zlámal-Bedingung äquivalent zur *Minimalwinkelbedingung* [7],

$$\alpha_1 \geq \alpha_0 > 0 \quad \forall T \in \mathcal{T}. \quad (\text{Z}')$$

So landen wir schließlich bei folgendem Interpolationsresultat:

**Korollar 4.** *Erfüllt die Familie  $\mathcal{T}$  von Dreiecken die Minimalwinkelbedingung (Z'), so gilt mit einer absoluten Konstanten  $c > 0$ , daß für jedes  $T \in \mathcal{T}$*

$$|u - \mathcal{I}_T u|_{H^1(T)} \leq \frac{ch}{\tan(\alpha_0/2)} |u|_{H^2(T)} \quad \forall u \in H^2(T).$$

## 2. Das Resultat von Syngge

Die Minimalwinkelbedingung ist der Wissensstand bei den Ingenieuren und leider auch bei den meisten Mathematikern. Ihre Notwendigkeit ist aber keinesfalls dadurch belegt, daß sie nicht bezweifelt wird. Im Gegenteil zeigen numerische Experimente, daß es scheinbar nicht darum geht, die Winkel gleichmäßig von 0 weg zu beschränken, sondern gleichmäßig kleiner als  $\pi$  zu halten, also die *Maximalwinkelbedingung*

$$\alpha_3 \leq \bar{\alpha} < \pi \quad \forall T \in \mathcal{T} \quad (\text{S})$$

zu erfüllen. Gestützt wird dies von einem Resultat von SYNGE [6] aus dem Jahre 1957:

**Lemma 5.** *Erfüllt die Familie  $\mathcal{T}$  von Dreiecken die Maximalwinkelbedingung (S), wobei  $\bar{\alpha} \geq 2\pi/3$  gewählt sei, so gilt für jedes  $T \in \mathcal{T}$  und  $u \in C^2(T)$ , daß*

$$\max_{x \in T} |\nabla(u - \mathcal{I}u)(x)| \leq \frac{h}{\cos(\bar{\alpha}/2)} \max_{x \in T} \|D^2u(x)\|_2.$$

Deswegen heißt die Maximalwinkelbedingung (S) auch zuweilen *Syngge-Bedingung*.

Der einfache, aber konzeptionell wichtige Beweis dieses Lemmas wird uns für das folgende als Richtlinie dienen — also führen wir ihn auch vor.

*Beweis.* Der entscheidende Trick ist, den Interpolationsfehler nicht gleich in Koordinatenrichtung zu differenzieren, sondern ersteinmal in Richtung der Kanten des Dreiecks. Sei dazu

$$\xi = \xi_{ij} = \frac{x_j - x_i}{|x_j - x_i|}$$

der Einheitsvektor, der vom Knoten  $x_i$  zum Knoten  $x_j$  zeigt,  $i \neq j$ . Dann gilt zum einen für das lineare Polynom  $\mathcal{I}u$

$$\partial_\xi \mathcal{I}u(x) = \frac{u(x_j) - u(x_i)}{|x_j - x_i|} \quad \forall x \in T,$$

zum anderen existiert nach dem Mittelwertsatz ein  $x_{ij} \in ]x_i, x_j[$ , so daß

$$\partial_\xi u(x_{ij}) = \frac{u(x_j) - u(x_i)}{|x_j - x_i|}.$$

Also gilt

$$\begin{aligned} |\partial_\xi u(x) - \partial_\xi \mathcal{I}u(x)| &= |\partial_\xi u(x) - \partial_\xi u(x_{ij})| \\ &= |\nabla \partial_\xi u(x_{ij} + \vartheta(x - x_{ij}))(x - x_{ij})| \\ &= |D^2 u(x_{ij} + \vartheta(x - x_{ij}))(\xi, x - x_{ij})| \end{aligned}$$

für ein  $\vartheta \in ]0, 1[$ , wobei wir wiederum vom Mittelwertsatz Gebrauch gemacht haben. Man beachte, daß die volle 2. Ableitung  $D^2 u$  eine Bilinearform ist! Mit der üblichen 2-Norm dieser Bilinearform erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} |\partial_\xi u(x) - \partial_\xi \mathcal{I}u(x)| &\leq \|D^2 u(x_{ij} + \vartheta(x - x_{ij}))\|_2 |\xi| |x - x_{ij}| \\ &\leq h \cdot \max_{z \in T} \|D^2 u(z)\|_2, \end{aligned}$$

da  $|\xi| = 1$  und  $|x - x_{ij}| \leq \text{diam } T = h$ . Wir müssen diese Information noch auf die Koordinatenrichtungen umrechnen. Seien dazu  $\xi_1 = \xi_{ij}$ ,  $\xi_2 = \xi_{ik}$  die zwei vom Knoten  $x_i$  abgehenden Kantenrichtungen,  $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ . Dann gilt

$$[\partial_{\xi_1} v, \partial_{\xi_2} v] = \nabla v \cdot S^T$$

mit der  $2 \times 2$  Matrix

$$S^T = [\xi_1, \xi_2].$$

Lösen wir nach  $\nabla v$  auf, so erhalten wir

$$\nabla v^T = S^{-1} \begin{bmatrix} \partial_{\xi_1} v \\ \partial_{\xi_2} v \end{bmatrix},$$

und mit  $v = u - \mathcal{I}u$  deshalb

$$|\nabla(u - \mathcal{I}u)(x)| \leq \|S^{-1}\|_{2,\infty} \max_{\ell=1,2} |\partial_{\xi_\ell}(u - \mathcal{I}u)(x)|.$$

Im Anschluß hieran werden wir

$$\|S^{-1}\|_{2,\infty} \leq \frac{1}{\cos(\alpha_i^*/2)}$$

mit  $\alpha_i^* = \max(\alpha_i, \pi - \alpha_i) \in [\pi/2, \pi[$  beweisen. Setzen wir alles zusammen, so erhalten wir

$$\max_{x \in T} |\nabla(u - \mathcal{I}_T u)(x)| \leq \frac{h}{\cos(\alpha_i^*/2)} \max_{x \in T} \|D^2 u(x)\|_2, \quad (F_i)$$

für  $i = 1, 2, 3$ , d.h. für jeden Knoten eine Abschätzung. Wir müssen uns nun die beste dieser Abschätzungen herausgreifen:

Dazu beachten wir, daß die Winkelsumme  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi$  im Dreieck die Abschätzungen  $\alpha_1 < \pi/2$ ,  $\alpha_2 < \pi/2$  impliziert. Also gilt

$$\alpha_i^* = \pi - \alpha_i \quad i = 1, 2.$$

Ist nun  $\alpha_3 \geq \pi/2$ , so gilt

$$\alpha_3^* = \alpha_3 \leq \alpha_3 + \alpha_2 = \alpha_1^*, \quad \alpha_3^* = \alpha_3 \leq \alpha_3 + \alpha_1 = \alpha_2^*.$$

Für  $\alpha_3 < \pi/2$  ist andererseits  $\alpha_3^* = \pi - \alpha_3$  und damit trivialerweise  $\alpha_3^* \leq \min(\alpha_1^*, \alpha_2^*)$ . Demnach gilt stets

$$\alpha_3^* = \min_{i=1,2,3} \alpha_i^*.$$

Die beste der Abschätzungen ( $F_i$ ) ist daher diejenige für  $i = 3$ . Wegen  $\pi/3 \leq \alpha_3 \leq \bar{\alpha}$  folgt aus  $2\pi/3 \leq \bar{\alpha} < \pi$ , daß

$$\cos(\bar{\alpha}/2) \leq \cos(\alpha_3^*/2),$$

so daß insgesamt die Behauptung des Lemmas bewiesen ist.  $\square$

Im Beweis des Lemmas haben wir eine Matrixnormabschätzung benutzt, die wir nochmals formulieren und sodann beweisen.

**Proposition 6.** *Zwei Vektoren  $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^2$  mit  $|\xi_i| = 1$ ,  $i = 1, 2$ , mögen einen Winkel  $\alpha \in ]0, \pi[$  bilden. Dann gelten für die Matrix  $S^T = [\xi_1, \xi_2] \in \text{Mat}_2(\mathbb{R})$  die Normabschätzungen*

$$\|S^{-1}\|_{2,\infty} = \max_{x \neq 0} \frac{|S^{-1}x|}{|x|_\infty} \leq \frac{1}{\cos(\alpha^*/2)}$$

und

$$\|S^{-1}\|_2 = \max_{x \neq 0} \frac{|S^{-1}x|}{|x|} = \frac{1}{\sqrt{2} \cos(\alpha^*/2)}$$

mit  $\alpha^* = \max(\alpha, \pi - \alpha)$ .

*Beweis.* Der Winkel  $\alpha \in ]0, \pi[$  sei so bestimmt, daß  $\xi_1^T \xi_2 = \cos \alpha$  ist. Dann gibt es eine Orthogonaltransformation  $Q \in \mathbf{O}(2)$ , so daß

$$Q\xi_1 = [1, 0]^T, \quad Q\xi_2 = [\cos \alpha, \sin \alpha]^T.$$

Mit dieser gilt

$$Q \cdot S^T = \begin{bmatrix} 1 & \cos \alpha \\ 0 & \sin \alpha \end{bmatrix}$$

und damit wegen  $Q^{-1} = Q^T$

$$Q \cdot S^{-1} = \frac{1}{\sin \alpha} \tilde{S}, \quad \tilde{S} = \begin{bmatrix} \sin \alpha & 0 \\ -\cos \alpha & 1 \end{bmatrix}.$$

Für die Spektralnorm gilt

$$\|S^{-1}\|_2 = \|Q \cdot S^{-1}\|_2 = \frac{1}{\sin \alpha} \sqrt{\lambda_{\max}(\tilde{S}^T \tilde{S})}.$$

Dabei besitzt die symmetrisch positiv definite Matrix

$$\tilde{S}^T \tilde{S} = \begin{bmatrix} \sin^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha \\ -\cos \alpha \sin \alpha & 1 + \cos^2 \alpha \end{bmatrix}$$

die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 - 2\lambda + \sin^2 \alpha = 0.$$

Lösen wir diese nach dem größeren Eigenwert auf, so erhalten wir

$$\lambda_{\max}(\tilde{S}^T \tilde{S}) = 1 + |\cos \alpha| = 1 - \cos \alpha^*,$$

also wegen  $\sin \alpha = \sin \alpha^*$

$$\|S^{-1}\|_2 = \frac{\sqrt{1 - \cos \alpha^*}}{\sin \alpha^*} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sin(\alpha^*/2)}{2 \sin(\alpha^*/2) \cos(\alpha^*/2)} = \frac{1}{\sqrt{2} \cos(\alpha^*/2)},$$

wobei uns einige einfache trigonometrische Umformungen nicht erspart blieben.

Nutzen wir schließlich die einfache Beziehung

$$|x| \leq \sqrt{2} \cdot |x|_{\infty} \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$$

aus, so können wir weiter abschätzen

$$\|S^{-1}\|_{2,\infty} = \max_{x \neq 0} \frac{|S^{-1}x|}{|x|_\infty} \leq \sqrt{2} \cdot \max_{x \neq 0} \frac{|S^{-1}x|}{|x|} = \sqrt{2} \cdot \|S^{-1}\|_2 = \frac{1}{\cos(\alpha^*/2)}.$$

□

Aus Lemma 5 kann auch eine  $H^1$ -Fehlerabschätzung für Finite Elemente gewonnen werden, allerdings für den Preis der höheren Glattheit  $u \in C^2(\bar{\Omega})$  der Lösung.

**Korollar 7.** *Sei eine Familie  $\{\mathcal{T}_h\}_h$  von Triangulierungen des polygonalen Gebietes  $\Omega$  gegeben, so daß  $\mathcal{T} = \bigcup_h \mathcal{T}_h$  der Maximalwinkelbedingung (S) genügt. Dann existiert eine absolute Konstante  $c > 0$ , so daß der Interpolationsoperator  $\mathcal{I}_h : C^2(\bar{\Omega}) \rightarrow X_h$  in die zugehörigen Räume linearer Elemente die folgende Abschätzung zuläßt:*

$$\|u - I_h u\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{c|\Omega|^{1/2} (1 + \text{diam } \Omega) h}{\cos(\bar{\alpha}/2)} \max_{x \in \bar{\Omega}} \|D^2 u(x)\|_2 \quad \forall u \in C^2(\bar{\Omega}).$$

*Beweis.* Ausdrücke einzelner Dreiecke  $T$  werden jetzt der Deutlichkeit halber mit  $T$  indiziert. Es gilt

$$|u - I_h u|_{H^1(\Omega)}^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |u - \mathcal{I}_T u|_{H^1(T)}^2,$$

wobei wir die einzelnen Summanden nach Lemma 5 wie folgt abschätzen können:

$$\begin{aligned} |u - \mathcal{I}_T u|_{H^1(T)}^2 &= \int_T |\nabla(u - \mathcal{I}_T u)|^2 dx \\ &\leq |T| \cdot \max_{x \in T} |\nabla(u - \mathcal{I}_T u)(x)|^2 \\ &\leq \frac{3|T| \cdot h^2}{\cos^2(\bar{\alpha}/2)} \max_{x \in \bar{\Omega}} \|D^2 u(x)\|_2^2, \end{aligned}$$

da ja  $h = \max_{T \in \mathcal{T}} h_T$ . Hierbei haben wir uns von der Restriktion  $\bar{\alpha} \geq 2\pi/3$  dadurch befreit, daß wir einen zusätzlichen Faktor  $\sqrt{3}$  in der Abschätzung von Lemma 5 hingenommen haben.

Aufsummieren ergibt

$$|u - I_h u|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \frac{3|\Omega| \cdot h^2}{\cos^2(\bar{\alpha}/2)} \max_{x \in \bar{\Omega}} \|D^2 u(x)\|_2^2.$$

Das Resultat von CIARLET und RAVIART [3] für den Interpolationsfehler in der  $L^2$ -Norm (wie in der Vorlesung behandelt!) lehrt die Existenz einer

absoluten Konstanten  $c_1 > 0$ , so daß

$$\begin{aligned} \|u - I_h u\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq c_1 \cdot h^4 \int_{\Omega} \|D^2 u(x)\|_2^2 dx \\ &\leq c_1 \cdot h^4 |\Omega| \max_{x \in \Omega} \|D^2 u(x)\|_2^2. \end{aligned}$$

Nutzen wir noch  $h \leq \text{diam } \Omega$  aus, so erhalten wir das Ergebnis mit  $c^2 = \max(3, c_1)$ .  $\square$

### 3. Das Resultat von Jamet

Wir wollen jetzt die Aussage des Korollars 7 unter der Glattheitsvoraussetzung  $u \in H^2(\Omega)$  statt  $u \in C^2(\bar{\Omega})$  beweisen. Diese Verbesserung mag einigen zu spitzfindig erscheinen, als daß sie weitere 9 Seiten zu dem Thema rechtfertigte. Diesem Einwand wollen wir einige Gründe entgegenhalten:

- Die Glattheitsannahme  $u \in H^2(\Omega)$  ist die *natürliche* Voraussetzung für die Fehlerabschätzung des Korollars 7. Sie ist für Lösungen  $u$  von elliptischen Problemen wesentlich realistischer als  $u \in C^2(\bar{\Omega})$  (z. B. für konvexe Gebiete  $\Omega$ ). Außerdem ist eine Fehlerabschätzung in  $H^2(\Omega)$  der Ausgangspunkt für entsprechende Fehlerabschätzungen, wenn  $u$  „irgendwie zwischen“  $H^1(\Omega)$  und  $H^2(\Omega)$  liegt, z.B. bei Gebieten mit einspringenden Ecken.
- Die Glattheitsvoraussetzung  $u \in H^2(\Omega)$  ist die *bestmögliche* für eine  $\mathcal{O}(h)$  Konvergenzrate. Wenn man dies weiß, sollte man sich mit weniger nicht zufrieden geben.
- Der Beweis von JAMET ist methodisch äußerst lehrreich, gerade im Kontrast zur Beweismethode von SYNGE.

Nach diesen apologetischen Vorbemerkungen beginnen wir mit der Darstellung und Analyse des Beweises von JAMET [5]. JAMET hatte für seinen Beweis im wesentlichen folgende zwei Ausgangspunkte:

- A. Das Resultat von CIARLET und RAVIART [3]. Für einen stetigen linearen Projektor  $\Phi : H^{k+1}(T) \rightarrow P_k(T)$  gibt es eine absolute Konstante  $c > 0$ , so daß

$$\|u - \Phi u\|_{L^2(T)} \leq ch^{k+1} |u|_{H^{k+1}(T)} \quad \forall u \in H^{k+1}(T),$$

sobald  $\Phi$  *affin transformiert*, d.h.

$$\widehat{\Phi} v = \hat{\Phi} \hat{v} \quad \forall v \in H^{k+1}(T).$$



Dabei ist für eine bijektiv affine Abbildung  $F : \hat{T} \rightarrow T, \hat{x} \mapsto B\hat{x} + b$

$$\hat{v} = v \circ F,$$

und  $\hat{\Phi}$  bezeichne die Abbildung  $\Phi$  für das spezielle Dreieck  $T = \hat{T}$  unter Berücksichtigung der Transformation  $F$ .

- B. Das Resultat von SYNGE [6], genauer dasjenige aus dem Beweis von Lemma 5. Für einen Einheitsvektor  $\xi$  in Richtung einer Kante des Dreieckes  $T$  gilt

$$\max_{x \in T} |\partial_\xi u(x) - \partial_\xi \mathcal{I}u(x)| \leq h \cdot \max_{x \in T} \|D^2 u(x)\|_2.$$

JAMET hatte nun die Idee, Resultate des Types B aus dem Resultat A zu gewinnen. Dazu konstruierte er eine Abbildung  $\Phi$ , die Konstanten reproduziert und für Vektoren  $\xi$  in Kantenrichtung des Dreieckes  $T$  die Vertauschungsrelation

$$\partial_\xi \mathcal{I} = \Phi \partial_\xi \tag{V}$$

erfüllt. Man sucht also nach einem stetigen linearen Projektor  $\Phi : H^1(\Omega) \rightarrow P_0(T)$ , so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^2(T) & \xrightarrow{\mathcal{I}} & P_1(T) \\ \partial_\xi \downarrow & & \partial_\xi \downarrow \\ H^1(T) & \xrightarrow{\Phi} & P_0(T) \end{array} \tag{V'}$$

kommutiert. Vielversprechend an dieser Idee ist nun, daß die Vertauschungsrelation (V) — und damit  $\Phi$  — *unabhängig* von der Länge des Vektors  $\xi$  ist. Denn aus (V) folgt wegen der Linearität

$$\partial_{\theta\xi} \mathcal{I} = \Phi \partial_{\theta\xi} \quad \forall \theta \neq 0.$$

Besäße  $\Phi$  die Eigenschaft, affin auf das Referenzdreieck  $\hat{T}$  zu transformieren, so würden wir demnach von der Längenänderung durch die Transformation

$$\hat{\xi} = B^{-1}\xi$$

nichts sehen. Genau diese Längenänderung hatten wir im Beweis von Lemma 1 durch den *schlechtestmöglichen* Fall

$$|\hat{\xi}|/|\xi| \leq \|B^{-1}\|_2 \leq \hat{h}/\rho$$

abschätzen müssen, was uns dann das Aspektverhältnis  $\sigma = h/\rho$  bescherte!

Wir stellen die Frage nach der Existenz eines affin transformierenden Operators  $\Phi$  bis zum nächsten Abschnitt zurück und sehen stattdessen zu, was mit ihm zu erreichen ist. Zuerst wiederholen wir die Beweistechnik von CIARLET und RAVIART [3].

**Lemma 8.** *Es gibt eine absolute Konstante  $c > 0$ , so daß für jeden Vektor  $\xi$  in Kantenrichtung eines Dreiecks  $T$  und die zugehörige affin transformierende Abbildung  $\Phi$  gilt*

$$\|v - \Phi v\|_{L^2(T)} \leq ch |v|_{H^1(T)} \quad \forall v \in H^1(T).$$

*Beweis.* Wir wählen eine bijektive affine Abbildung

$$F : \hat{T} \rightarrow T, \quad \hat{x} \mapsto B\hat{x} + b$$

so, daß  $\hat{\xi} = B^{-1}\xi$  ein Vielfaches des Koordinatenvektors  $e_1$  ist.  $\hat{\Phi}$  sei dann die feste zu  $e_1$  gehörige Abbildung. Wir erhalten aus den Transformationsformeln für die Sobolev-Halbnormen, daß

$$\begin{aligned} \|v - \Phi v\|_{L^2(T)} &= |\det B|^{1/2} \|\hat{v} - \hat{\Phi}\hat{v}\|_{L^2(\hat{T})} \\ &= |\det B|^{1/2} \inf_{\hat{p} \in P_0(\hat{T})} \|\hat{v} + \hat{p} - \hat{\Phi}(\hat{v} + \hat{p})\|_{L^2(\hat{T})} \\ &\leq |\det B|^{1/2} \|\text{id} - \hat{\Phi}\|_{\mathcal{L}(H^1(\hat{T}), L^2(\hat{T}))} \inf_{\hat{p} \in P_0(\hat{T})} \|\hat{v} + \hat{p}\|_{H^1(\hat{T})} \\ &= c_1 \cdot |\det B|^{1/2} \inf_{\hat{p} \in P_0(\hat{T})} \|\hat{v} + \hat{p}\|_{H^1(\hat{T})}, \end{aligned}$$

wobei wir ausnutzten, daß  $\hat{\Phi}$  Konstanten reproduziert. Der Satz von DENY und LIONS [4], d.h.

$$\inf_{\hat{p} \in P_0(\hat{T})} \|\hat{v} + \hat{p}\|_{H^1(\hat{T})} \leq c_2 |\hat{v}|_{H^1(\hat{T})},$$

erlaubt dann mit Hilfe der Transformationsformeln für die Sobolev-Halbnormen die weitere Abschätzung

$$\begin{aligned} \|v - \Phi v\|_{L^2(T)} &\leq c_3 \cdot |\det B|^{1/2} |\hat{v}|_{H^1(\hat{T})} \\ &\leq c_4 \cdot \|B\|_2 |v|_{H^1(T)} \leq c_5 \cdot h |v|_{H^1(T)}. \end{aligned}$$

□

Jetzt kommt die Vertauschungsrelation (V) zum Zuge, um ein Resultat vom Syntge-Typ B zu beweisen.

**Korollar 9.** *Es gibt eine absolute Konstante  $c > 0$ , so daß für jeden Vektor  $\xi$ ,  $|\xi| = 1$ , in Kantenrichtung eines Dreieckes  $T$  gilt*

$$\|\partial_\xi u - \partial_\xi \mathcal{I}u\|_{L^2(T)} \leq ch|u|_{H^2(T)} \quad \forall u \in H^2(T).$$

*Beweis.* Wir wenden Lemma 8 auf  $v = \partial_\xi u$  an und erhalten mit Hilfe der Vertauschungsrelation

$$\Phi \partial_\xi u = \partial_\xi \mathcal{I}u$$

daß

$$\|\partial_\xi u - \partial_\xi \mathcal{I}u\|_{L^2(T)} \leq c_1 h |\partial_\xi u|_{H^1(T)}.$$

Nun gilt aber wegen  $|\xi| = 1$

$$\begin{aligned} |\partial_\xi u|_{H^1(T)}^2 &= \int_T |\nabla \partial_\xi u(x)|^2 dx \\ &\leq \int_T \|D^2 u(x)\|_2^2 |\xi| dx \\ &\leq c_2 |u|_{H^2(T)}^2, \end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt.  $\square$

Mit ähnlichen Argumenten wie im Beweis des Syngge-Resultates Lemma 5 erhalten wir hieraus das Hauptergebnis von JAMET [5].

**Satz 10.** *Es gibt eine absolute Konstante  $c > 0$ , so daß für jede Familie  $\mathcal{T}$  von Dreiecken, welche die Maximalwinkelbedingung (S) erfüllt, gilt: für jedes  $T \in \mathcal{T}$  ist*

$$|u - \mathcal{I}u|_{H^1(T)} \leq \frac{c \cdot h}{\cos(\bar{\alpha}/2)} |u|_{H^2(T)} \quad \forall u \in H^2(T).$$

*Beweis.* Auch hier muß das Ergebnis des Korollars 9 nur auf die Koordinatenrichtungen umgerechnet werden. Seien dazu  $\xi_1 = \xi_{ij}$ ,  $\xi_2 = \xi_{ik}$  die zwei vom Knoten  $x_i$  abgehenden Kantenrichtungen,  $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ , mit  $|\xi_1| = |\xi_2| = 1$ . Dann gilt

$$[\partial_{\xi_1} v, \partial_{\xi_2} v] = \nabla v \cdot S^T$$

mit der  $2 \times 2$  Matrix

$$S^T = [\xi_1, \xi_2].$$

Lösen wir nach  $\nabla v$  auf, so erhalten wir

$$\nabla v^T = S^{-1} \begin{bmatrix} \partial_{\xi_1} v \\ \partial_{\xi_2} v \end{bmatrix},$$

und mit  $v = u - \mathcal{I}u$  deshalb nach Proposition 6

$$|\nabla(u - \mathcal{I}u)(x)| \leq \frac{1}{\cos(\alpha_i^*/2)} \max_{\ell=1,2} |\partial_{\xi_\ell}(u - \mathcal{I}u)(x)|,$$

wobei  $\alpha_i^* = \max(\alpha_i, \pi - \alpha_i) \in [\pi/2, \pi]$ . Für die Integralnormen erhalten wir somit

$$\begin{aligned} |u - \mathcal{I}u|_{H^1(T)}^2 &= \int_T |\nabla(u - \mathcal{I}u)(x)|^2 dx \\ &\leq \frac{1}{\cos^2(\alpha_i^*/2)} \max_{\ell=1,2} \int_T |\partial_{\xi_\ell}(u - \mathcal{I}u)(x)|^2 dx \\ &= \frac{1}{\cos^2(\alpha_i^*/2)} \max_{\ell=1,2} \|\partial_{\xi_\ell}(u - \mathcal{I}u)\|_{L^2(T)}^2, \end{aligned}$$

so daß Korollar 9 die Abschätzung

$$|u - \mathcal{I}u|_{H^1(T)} \leq \frac{c_1 \cdot h}{\cos(\alpha_i^*/2)} |u|_{H^2(T)}$$

liefert. Dies ist für jeden Knoten des Dreieckes eine Abschätzung. Im Beweis von Lemma 5 haben wir

$$\alpha_3^* = \min_{i=1,2,3} \alpha_i^*$$

zeigt, so daß die Abschätzung für  $i = 3$  die beste ist. Ferner folgt aus  $\pi/3 \leq \alpha_3 \leq \bar{\alpha}$ , daß

$$\cos(\bar{\alpha}/2) \leq \sqrt{3} \cos(\alpha_3^*/2).$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.  $\square$

**Bemerkung 11.** JAMET hat in seiner Arbeit [5] eigentlich nur folgendes schwächere Resultat gezeigt: Es gibt eine absolute Konstante  $c > 0$ , so daß für jedes  $T \in \mathcal{T}$

$$|u - \mathcal{I}u|_{H^1(T)} \leq \frac{c \cdot h}{\cos(\bar{\alpha}/2)} \left( |u|_{H^2(T)} + h |u|_{H^3(T)} \right) \quad \forall u \in H^3(T).$$

Unser schärferes Resultat geht auf eine leicht veränderte Konstruktion des Operators  $\Phi$  zurück. Den wesentlichen Ideen von JAMET tut dies aber keinen Abbruch. Satz 10 wurde übrigens mit einer völlig anderen, weniger instruktiven Methode auch von BABUŠKA und AZIZ [1] bewiesen; publiziert im gleichen Jahr 1976 wie die Arbeit von JAMET. Von daher nahmen wir die Gewißheit, das suboptimale Ergebnis von JAMET verbessern zu können.

Analog zu Korollar 7 können das Ergebnis von Satz 10 auch für Triangulierungen formulieren.

**Korollar 12.** Sei eine Familie  $\{\mathcal{T}_h\}_h$  von Triangulierungen des polygonalen Gebietes  $\Omega$  gegeben, so daß  $\mathcal{T} = \bigcup_h \mathcal{T}_h$  der Maximalwinkelbedingung (S) genügt. Dann existiert eine absolute Konstante  $c > 0$ , so daß der Interpolationsoperator  $\mathcal{I}_h : H^2(\Omega) \rightarrow X_h$  in die zugehörigen Räume linearer Elemente die folgende Abschätzung zuläßt:

$$\|u - I_h u\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{c(1 + \text{diam } \Omega)h}{\cos(\bar{\alpha}/2)} |u|_{H^2(\Omega)} \quad \forall u \in H^2(\Omega).$$

Der Leser möge dies durch scharfes Hinsehen beweisen.

**Bemerkung 13.** Korollar 7 ist eine leichte Folge aus Korollar 12. Wer's nicht glaubt, beweist es sich!

## 4. Die Existenz des Operators $\Phi$

Reine lineare Algebra lehrt uns, daß das kommutative Diagramm ( $V'$ ) nur dann bestehen kann, wenn die *Kernbedingung*

$$\partial_\xi u = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_\xi \mathcal{I}u = 0 \quad (\text{K})$$

erfüllt ist. Glücklicherweise scheitern wir hieran nicht:

**Proposition 14.** Für jeden Vektor  $\xi$  in Richtung einer Kante des Dreieckes  $T$  ist die Kernbedingung (K) erfüllt.

*Beweis.* Der Vektor  $\xi$  zeige vom Knoten  $x_i$  zum Knoten  $x_j$ ,  $i \neq j$ , d.h. für ein  $\theta > 0$  gilt

$$\xi = \theta(x_j - x_i).$$

Aus  $\partial_\xi u = 0$  folgt daher  $u(x_i) = u(x_j)$ , so daß schließlich gilt

$$\partial_\xi \mathcal{I}u = \theta(u(x_j) - u(x_i)) = 0.$$

□

Aus dem Bestehen der Kernbedingung (K) kann nun mit linearer Algebra auf die Existenz einer *linearen* Abbildung  $\Phi$  geschlossen werden. Dies ist aber für unsere Zwecke nicht ausreichend: Wir benötigen außerdem die Stetigkeit von  $\Phi$  und die Eigenschaft, daß  $\Phi$  affin transformiert. JAMET [5] hat die Existenz eines solchen Operators  $\Phi$  aus abstrakten funktionalanalytischen Prinzipien bewiesen. Wir verlassen hier seine Beweisführung und konstruieren  $\Phi$  explizit. Hierzu benötigen wir noch ein Resultat der Sobolevraum-Theorie, den sogenannten *Spursatz*.

**Satz 15.** Für beschränkte Gebiete  $\Omega$  mit Lipschitz-Rand gibt es genau eine stetige lineare Abbildung

$$\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega),$$

welche den Restriktionsoperator von  $C^1(\bar{\Omega})$  fortsetzt, d.h.

$$\gamma u = u|_{\partial\Omega} \quad \forall u \in C^1(\bar{\Omega}).$$

Diese Abbildung heißt Spuroperator.

Wir wollen diesen Satz hier nicht beweisen. Einen schönen und instruktiven Beweis findet man z.B. in dem Lehrbuch von BRAESS [2]. Stattdessen einige Bemerkungen zur Bedeutung dieses Satzes:

- Da für Lipschitz-berandete Gebiete der Rand  $\partial\Omega$  eine Menge vom Maß Null ist, hat die Restriktion  $u|_{\partial\Omega}$  für eine beliebige Funktion  $u \in H^1(\Omega)$  keinerlei Bedeutung, können wir sie doch schadlos auf einer Nullmenge verändern. Der Spuroperator bietet nun einen vollwertigen Ersatz für die nicht definierbare Restriktion.
- Die eigentliche Aussage und Schwierigkeit des Satzes ist die Existenz einer Konstanten  $c > 0$ , so daß

$$\left\| u|_{\partial\Omega} \right\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq c \|u\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall u \in C^1(\bar{\Omega}).$$

Der Rest folgt dann aus den üblichen Dichteschlüssen. Der Witz ist also eine Abschätzung für klassisch stetig differenzierbare Funktionen!

Zurück zur Konstruktion des Operators  $\Phi$ . Sei  $\xi$  ein Vektor, der vom Knoten  $x_i$  zum Knoten  $x_j$  des Dreieckes  $T$  zeigt,  $i \neq j$ . Mit Hilfe des Spuroperators  $\gamma : H^1(T) \rightarrow L^2(\partial T)$  definieren wir für  $u \in H^1(T)$

$$\Phi u = \int_0^1 (\gamma u)(x_i + \tau(x_j - x_i)) d\tau. \quad (\text{D})$$

**Proposition 16.** Der durch (D) definierte Operator  $\Phi$  ist eine stetige lineare Abbildung

$$\Phi : H^1(T) \rightarrow P_0(T) = \mathbb{R}.$$

Ferner erfüllt er die Verätschungsrelation (V), d.h. für  $u \in H^2(T)$  gilt

$$\Phi \partial_\xi u = \partial_\xi \mathcal{I}u.$$

*Beweis.* Sei  $\Gamma$  die Kante  $[x_i, x_j]$  des Dreieckes  $T$ . Eine andere Schreibweise für (D) ist dann

$$\Phi u = \frac{1}{|x_j - x_i|} \int_{\Gamma} (\gamma u)(x) dx.$$

Für  $u \in H^1(T)$  gilt dann nach der Cauchy-Schwarz Ungleichung, daß

$$\begin{aligned} |\Phi u| &\leq \frac{1}{|x_j - x_i|} \int_{\Gamma} 1 \cdot |(\gamma u)(x)| dx \\ &\leq \frac{1}{|x_j - x_i|} |x_j - x_i|^{1/2} \cdot \left( \int_{\Gamma} |(\gamma u)(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{|x_j - x_i|^{1/2}} \|\gamma u\|_{L^2(\partial T)} \\ &\leq \frac{\|\gamma\|_{\mathcal{L}(H^1(T), L^2(\partial T))}}{|x_j - x_i|^{1/2}} \|u\|_{H^1(T)}. \end{aligned}$$

Also ist  $\Phi$  wie gewünscht stetig.

Nun zur Vertauschungsrelation (V). Aus Dichtegründen reicht es,  $u \in C^2(T)$  zu betrachten. Da nach dem Spursatz dann  $\gamma \partial_{\xi} u = \partial_{\xi} u|_{\partial T}$  ist und  $\xi = \theta(x_j - x_i)$  für ein  $\theta > 0$ , können wir wie folgt umformen:

$$\begin{aligned} \Phi \partial_{\xi} u &= \theta \int_0^1 \nabla u(x_i + \tau(x_j - x_i))(x_j - x_i) d\tau \\ &= \theta \int_0^1 \frac{d}{d\tau} u(x_i + \tau(x_j - x_i)) d\tau \\ &= \theta(u(x_j) - u(x_i)) = \partial_{\xi} \mathcal{I}u. \end{aligned}$$

□

**Bemerkung 17.** Sieht man sich die letzte Umformung im Beweis rückwärts an, so wird deutlich, wie naheliegend unsere Konstruktion von  $\Phi$  ist.

Was bleibt, ist der Nachweis, daß der Operator  $\Phi$  affin transformiert.

**Proposition 18.** Sei  $F : \hat{T} \rightarrow T, \hat{x} \mapsto B\hat{x} + b$  eine bijektive affine Transformation. Der Vektor  $\xi$  zeige in Richtung einer Kante des Dreieckes  $T$  und definiere nach (D) den Operator  $\Phi : H^1(T) \rightarrow P_0(T)$ . Der Vektor  $\hat{\xi} = B^{-1}\xi$  zeigt in Richtung einer Kante von  $\hat{T}$  und definiert daher gleichfalls nach (D) eine Abbildung  $\hat{\Phi} : H^1(\hat{T}) \rightarrow P_0(\hat{T})$ . Für jedes  $u \in H^1(T)$  gilt

$$\widehat{\Phi}u = \hat{\Phi}\hat{u},$$

mit der Abkürzung  $\hat{v} = v \circ F$ .

*Beweis.* Der Vektor  $\xi$  zeige vom Knoten  $x_i$  zum Knoten  $x_j$ ,  $i \neq j$ . Dann gibt es ein  $\theta > 0$ , so daß

$$\xi = \theta(x_j - x_i).$$

Die Urbilder  $\hat{x}_i = F^{-1}(x_i)$ ,  $\hat{x}_j = F^{-1}(x_j)$  sind verschiedene Knoten des Dreiecks  $\hat{T}$ , und es gilt

$$\xi = \theta(x_j - x_i) = \theta(F(\hat{x}_j) - F(\hat{x}_i)) = \theta B(\hat{x}_j - \hat{x}_i).$$

Also zeigt der Vektor  $\hat{\xi}$  vom Knoten  $\hat{x}_i$  in Richtung auf den Knoten  $\hat{x}_j$  und es gilt

$$\hat{\xi} = \theta(\hat{x}_j - \hat{x}_i).$$

Aus der Affinität von  $F$  erhalten wir

$$F(\hat{x}_i + \tau(\hat{x}_j - \hat{x}_i)) = x_i + \tau(x_j - x_i),$$

so daß wir schließlich umformen können:

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}u &= \int_0^1 \hat{u}(\hat{x}_i + \tau(\hat{x}_j - \hat{x}_i)) d\tau \\ &= \int_0^1 u(F(\hat{x}_i + \tau(\hat{x}_j - \hat{x}_i))) d\tau \\ &= \int_0^1 u(x_i + \tau(x_j - x_i)) d\tau \\ &= \Phi u = \widehat{\Phi}u. \end{aligned}$$

Dabei haben wir genutzt, daß für eine Konstante  $c$  trivialerweise  $\hat{c} = c$  gilt.  $\square$

Damit sind unsere Betrachtungen am Ende. Eine Bemerkung zum Schluß können wir uns aber nicht verkneifen: Die Maximalwinkelbedingung ist notwendig für die Konvergenz Finiter Elemente! Dies zeigen sowohl JAMET [5] als auch BABUŠKA und AZIZ [1] anhand je eines Beispiels.

## Literaturverzeichnis

- [1] I. BABUŠKA UND A. K. AZIZ. On the angle condition in the finite element method. *SIAM J. Numer. Anal.* **13**, 214–226 (1976).



- [2] D. BRAESS. „Finite Elemente“. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1992).
- [3] P. G. CIARLET UND P.-A. RAVIART. General Langrange and Hermite interpolation in  $\mathbb{R}^n$  with applications to finite element methods. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **46**, 177–199 (1972).
- [4] J. DENY UND J.-L. LIONS. Les espaces du type de Beppo Levi. *Ann. Inst. Fourier* **5**, 305–370 (1953-54).
- [5] P. JAMET. Estimations d’erreur pour des elements finis droits presque degeneres. *R.A.I.R.O. Anal. Numér.* **10**, 43–61 (1976).
- [6] J. L. SYNGE. „The Hypercircle in Mathematical Physics“. Cambridge University Press, Cambridge (1957).
- [7] M. ZLÁMAL. On the finite element method. *Numer. Math.* **12**, 394–409 (1968).