Übungsblatt 4

Aufgabe 8: Fourier-Galerkin-Methode

Die Koeffizienten der Fourierentwicklung können über die Galerkin-Methode oder durch Kollokation bestimmt werden. Bei der Kollokationsmethode gilt für den Koeffizientenvektor $c \in \mathbb{C}^K$ die Differentialgleichung

$$i\dot{c} = D_K c + \mathcal{F}_K V_K \mathcal{F}_K^{-1} c \tag{C}$$

mit den Diagonalmatrizen $D_K = \frac{1}{2\mu}\,\mathrm{diag}(k^2)$ und $V_K = \mathrm{diag}(V(x_n))$, wobei $\mathcal{F}_K$ die diskrete Fouriertransformation bezeichnet.

Analog zur Galerkin-Methode für Hermite-Funktionen betrachten wir diese nun für die trigonometrischen Funktionen $\varphi_k = \exp(-ikx)$, $k \in \{-tfracK2. \dots, \frac{K}{2} - 1\}$.

a) Zeigen Sie, dass der Vektor c der Entwicklungskoeffizienten die Differentialgleichung

$$i\dot{c} = D_K c + \tilde{V}_K c$$

erfüllt, wobei D_K wieder die Diagonalmatrix $D_K = \frac{1}{2\mu}\,\mathrm{diag}(k^2)$ ist und $\tilde{V}_K$ durch

$$(\tilde{V}_K)_{jk} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ijx} V(x) e^{ikx}\,\mathrm{d}x$$

gegeben ist.

b) Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{F}_K V_K \mathcal{F}_K^{-1} = \mathcal{Q}(\tilde{V}_K)$$

gilt, wobei $\mathcal{Q}(\tilde{V}_K)$ die Approximation von $\tilde{V}_K$ durch die aufsummierte Trapezregel bezeichne.

c) Wählen Die zur Approximation von $\tilde{V}_K$ eine andere Quadraturmethode, zum Beispiel die Matlabfunktion `quad`. Vergleichen Sie für $V(x) = 1$ numerisch das Verhalten der Matrizen $\mathcal{F}_K V_K \mathcal{F}_K^{-1}$ und $\tilde{V}_K$ für $K \gg 1$. Erklären Sie Ihre Beobachtungen.

Aufgabe 9: Lösung einer Differentialgleichung

Betrachten Sie die Schrödingergleichung

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = \left(-\frac{1}{2\mu}\Delta + V(x)\right)\psi(x,t) \tag{S}$$

mit dem Potential $V(x) = -\cos(\frac{x}{2})$, Masse $\mu = 100$ und Anfangswellenfunktion

$$\psi(x,0) = \sqrt[4]{\frac{20}{\pi}}e^{-10(x-0.5)^2}$$

auf dem Rechengebiet $[-\pi,\pi]$ für $t \in [0,100]$.

a) Lösen Sie (S) mittels Kollokation, indem Sie die gewöhnliche Differentialgleichung (C) mit der Matlabfunktion `ode45` lösen.

b) Stellen Sie die Lösung graphisch dar.

Informationen

Die Besprechung der Aufgaben findet am **Dienstag, den 18.12.2012** statt.

Bei Fragen, der Entdeckung von Fehlern im Übungsblatt oder anderen Problemen melden Sie sich bitte per eMail bei Falko Marquardt (marquard@ma.tum.de).