## Aufgabe (Chebyshev Polynomials)

Gegeben sei die Жуковский - Transformation

$$\Psi(w) = \frac{1}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right).$$

Zeigen Sie, dass in der Laurentreihenentwicklung der Funktion

$$g(w) := \frac{\Psi'(w)}{\Psi(w) - x}$$

für $|w| > 1$ und $x \in [-1, 1]$ nur Potenzen von $w$ mit negativem Exponenten auftreten.

## Lösungsvorschlag

Man berechnet

$$\Psi'(w) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{w^2}\right),$$

also

$$g(w) = \frac{w^2 - 1}{w^3 - 2xw^2 + w}.$$

Die Laurentreihe von $g(w)$ bei $w_0 = \infty$ hat die Koeffizienten von $h(z) := g(\frac{1}{w})$ bei $z_0 = 0$. Diese berechnen sich aus

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_1(0)} \frac{h(z)}{(z - z_0)^{k+1}}\, dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_1(0)} \frac{1 - z^2}{z^{k+1}(z + \frac{1}{z} - 2x)}\, dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_1(0)} \frac{1 - z^2}{(z^2 + 1 - 2xz)}\, z^{-k}\, dz$$

Der Integrand ist holomorph im Inneren von $B_1(0)$ für $k < 0$, weil für die Lösungen $z_1$, $z_2$ von $z^2 + 1 - 2xz = 0$ folgt, dass $|z_{1,2}| = 1$. Begründung: Die Lösungen sind gegeben durch

$$z_{1,2} = x \pm \sqrt{x^2 - 1}.$$

Für $x \in \{-1, 1\}$ ist offensichtlich $|z_{1,2}| = 1$, für $|x| < 1$ gilt $z_{1,2} = x \pm i\sqrt{1 - x^2}$, also auch

$$|z_{1,2}|^2 = x^2 + 1 - x^2 = 1.$$

Also gilt nach dem Integralsatz von Cauchy, dass $a_k = 0$ für $k < 0$ und damit

$$h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} z^{k+1}.$$

für alle $z$ mit $|z| < 1$. Daraus erhält man direkt

$$g(w) = h(\tfrac{1}{z}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} z^{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} w^{-k-1}.$$

für alle $w$ mit $|w| > 1$.