C. Lasser, F. Marquardt, D. Sattlegger 25. Oktober 2011

Aufgabe 1 (Propagation von Wellenpaketen)
Gegeben sei die freie Schrödingergleichung

$$i\,\frac{\partial \psi}{\partial t}(x,t) = -\frac{1}{2m}\Delta\psi(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^d,\ t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

wobei die Einheiten so gewählt sind, dass $\hbar = 1$ gilt. Als Anfangswellenfunktion betrachten wir

$$\psi_0(x) = A(x)\, \mathrm{e}^{ip\cdot x} \quad \text{mit } A \in \mathcal{S} \text{ und } p \in \mathbb{R}^d \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass für die Lösung von (1) mit Anfangswert (2) gilt

$$\psi(x,t) = A\left(x - \frac{p}{m}t\right)\, \mathrm{e}^{ip\cdot(x-\frac{p}{2m}t)} + \mathcal{O}\left(\frac{t}{m}\right) \quad \text{für } m \to \infty \tag{3}$$

und interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

Aufgabe 2 (Endlichdimensionale Schrödingergleichung)
Sei $H \in \mathbb{C}^{d\times d}$ eine hermitesche Matrix und $U(t) := \exp(-itH) \in \mathbb{C}^{d\times d}$. Dabei bezeichne $\exp : \mathbb{C}^{d\times d} \to \mathbb{C}^{d\times d}$ die Exponentialabbildung für Matrizen.

(a) Zeigen Sie auf zwei verschiedenen Wegen, dass $U(t)$ folgende Gruppeneigenschaft besitzt

$$U(t+s) = U(t)\, U(s) \quad \text{für alle } s,t \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

indem Sie:

1. benutzen, dass hermitesche Matrizen unitär diagonalisierbar sind und
2. die Gleichung explizit anhand der Matrixexponentialreihe bestätigen.

(b) Folgern Sie nun, dass die Matrix $U(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ unitär ist und berechnen Sie die zu $U(t)$ inverse Matrix $U(t)^{-1}$.

(c) Zeigen Sie, dass die Abbildung $U : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{d\times d}, t \mapsto U(t)$ differenzierbar ist und für jedes $t \in \mathbb{R}$ die Differentialgleichung

$$i\,\frac{d}{dt}U(t) = H\,U(t) \tag{5}$$

erfüllt.

Bemerkung: *In Aufgabe 2 betrachten wir die Dynamik der Schrödingergleichung auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum. Die Quantenmechanik wird allerdings durch unbeschränkte Operatoren auf dem Hilbertraum $L^2(\mathbb{R}^d)$ beschrieben. Dort reichen die von uns hier verwendeten Hilfsmittel nicht mehr aus. Allerdings hat Stone (1932) mit Hilfe des sogenannten Spektralkalküls ein analoges Resultat für selbst-adjungierte Operatoren auf Hilberträumen gezeigt. Stone bewies außerdem noch eine interessante Umkehrung, dass es für jede (stark stetige) Gruppe unitärer Operatoren einen selbst-adjungierte Operator gibt, der diese erzeugt.*