Gaußsche Wellenpakete

Caroline Lasser, 31.10.2011

Für $\psi_0(x) = \pi^{-d/4} \exp(-|x|^2/2 + ip \cdot x)$ mit $p \in \mathbb{R}^d$ gilt

$$\widehat{\psi_0}(k) = \pi^{-d/4} \exp\bigl(-|k-p|^2/2\bigr) .$$

Lemma. Für $f(x) = \exp(-x^2/2)$ gilt $\widehat{f}(k) = \exp(-k^2/2)$.

$|\psi_0|^2$ und $|\widehat{\psi_0}|^2$ sind die Dichten von $N(0, 1/\sqrt{2})$ und $N(p, 1/\sqrt{2})$. Unter der freien Dynamik mit $m = 1$ gilt

$$\begin{aligned} \psi(x,t) &= \pi^{-d/4}(1+it)^{-1/2} \exp\left(-\frac{|x|^2/2 - i(x \cdot p - t|p|^2/2)}{1+it}\right), \\ |\psi(x,t)|^2 &= \pi^{-d/2}(1+t^2)^{-1/2} \exp\left(-\frac{|x-pt|^2}{1+t^2}\right). \end{aligned}$$

Insbesondere ist

- $\psi(x,-t) = \overline{\psi}(x,t)$ für $p = 0$.
- $\psi(0,t;p) - \psi(0,t;-p) = 0$.

Literatur: Ch. 2 & 3 in B. Thaller, Visual Quantum Mechanics, Springer, 2000.