
12 × 12 Schlüsselkonzepte zur Mathematik

Oliver Deiser · Caroline Lasser ·
Elmar Vogt · Dirk Werner

12 × 12 Schlüsselkonzepte zur Mathematik

2. Auflage

 Springer Spektrum

Oliver Deiser
München, Deutschland

Caroline Lasser
Lehrstuhl für Numerische Mathematik
Technische Universität München
Garching, Deutschland

Elmar Vogt
Institut für Mathematik
Freie Universität Berlin Fachbereich Mathe-
matik und Informatik
Berlin, Deutschland

Dirk Werner
Freie Universität Berlin Fachbereich Mathe-
matik und Informatik
Berlin, Deutschland

ISBN 978-3-662-47076-3
DOI 10.1007/978-3-662-47077-0

ISBN 978-3-662-47077-0 (eBook)

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2011, 2016

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen.

Planung: Dr. Andreas Rüdinger

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

Springer Berlin Heidelberg ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media
(www.springer.com)

Vorwort zur 2. Auflage

In der 2. Auflage haben wir die uns bekannt gewordenen Tippfehler korrigiert und Unstimmigkeiten bereinigt. Wir danken allen Leserinnen und Lesern, die uns über kleinere und größere Fehler informiert haben, und wir möchten Sie auch weiterhin bitten, uns Ihre Kommentare zu schicken!

Ferner haben wir jedes Kapitel um einen Abschnitt mit Literaturhinweisen ergänzt, die zum Weiterlesen anregen sollen. Natürlich handelt es sich nicht um eine erschöpfende Bibliographie, was ja bei der Fülle der existierenden und rasant wachsenden Lehrbuchliteratur auch gar nicht möglich wäre.

Berlin und München, im April 2015

Oliver Deiser, Caroline Lasser
Elmar Vogt, Dirk Werner

Vorwort

Das Ziel des vorliegenden Buches ist, wichtige mathematische Begriffsbildungen, Methoden, Ideen und Resultate zu sammeln, anzuordnen und in je etwa zwei Seiten lesbar und informativ darzustellen. Die Darstellung ist informell und sorgt sich nicht – wie bei einer mathematischen Monographie – allzu sehr um systematische und hierarchische Aspekte, will aber die die Mathematik kennzeichnende Genauigkeit nicht preisgeben.

Die Leserinnen und Leser, die wir in erster Linie im Blick haben, sind Studierende der Mathematik, die neben den Vorlesungsskripten und den zugehörigen Lehrbüchern gerne einen Text zur Hand haben möchten, der zwischen Lexikon und Lehrbuch einzuordnen ist und Überblick, Hilfestellung und Orientierung bietet, einen Text, der sich zur Wiederholung zentraler Konzepte der mathematischen Grundvorlesungen ebenso eignet wie zur Gewinnung erster Einblicke in noch unbekannte Teilgebiete der Mathematik.

Was das Buch nicht kann und will, ist einen vollständigen Katalog der Schlüsselkonzepte der Mathematik zu geben. Die Auswahl der Begriffe ist subjektiv, und auch ihre Darstellung ist von unseren wissenschaftlichen Erfahrungen bestimmt, die keinen Anspruch auf Allgemeingültigkeit erheben. Auf der anderen Seite haben wir natürlich versucht, unsere Auswahl am Lernenden zu orientieren, der das gewaltige Wissensgebäude der modernen Mathematik betritt. Was ihm dort fast sicher begegnet, sollte reichlich vorhanden sein, zusammen mit einigen Ausblicken, die ihn auf etwas hinweisen, das ihn vielleicht einmal besonders fesseln und beschäftigen wird.

Das Buch ist in zwölf Kapitel unterteilt und jedes Kapitel in zwölf Unterkapitel, die wir in Querverweisen als Abschnitte bezeichnen. Diese Einteilung dient der Organisation und damit der Lesbarkeit des Buches. Sie soll keineswegs andeuten, dass die Mathematik in zwölf Disziplinen so zerfallen würde wie Gallien in drei Teile. Das Bedürfnis nach Ordnung und Symmetrie ist ein menschliches, und die Leserinnen und Leser sind explizit dazu aufgerufen, Linien nicht als Gräben zu verstehen und sie kritisch zu hinterfragen.

Das Kap. 1 beschäftigt sich mit der mathematischen Methode und den überall verwendeten sprachlichen Grundbegriffen der Mathematik. In Kap. 2 wird das Zahlssystem von den natürlichen Zahlen bis hin zu den p -adischen Zahlen behan-

delt. Die Zahlentheorie, also die Theorie der natürlichen Zahlen, bildet das Thema des 3. Kapitels. Kapitel 4 beschäftigt sich mit der diskreten Mathematik, wobei die Graphentheorie im Zentrum steht, die der diskreten Mathematik einen flexiblen sprachlichen Rahmen zur Verfügung stellt. Das 5. Kapitel behandelt grundlegende Konzepte der linearen Algebra im Umfeld von Vektoren, linearen Abbildungen und Matrizen. Im algebraischen 6. Kapitel reicht der Bogen von den algebraischen Grundstrukturen bis hin zu einem Ausblick auf die Galois-Theorie. Der Analysis sind die Kap. 7 und 8 gewidmet; sie zeichnen den langen Weg nach, der von Folgen, Grenzwerten und stetigen Funktionen zum Gaußschen Integralsatz und der Analysis für die komplexen Zahlen führt. Aspekte der Topologie und Geometrie werden in Kap. 9 betrachtet, und gerade hier wird der Auswahlcharakter der einzelnen Abschnitte augenfällig. Grundgedanken der Numerik – vor allem in Bezug auf die lineare Algebra – werden in Kap. 10 vorgestellt, und Kap. 11 wählt aus dem weiten Feld der Stochastik und Wahrscheinlichkeitstheorie einige Grundbegriffe und Ausblicke aus. Das abschließende 12. Kapitel widmet sich der mathematischen Logik, wobei hier Themen der Mengenlehre dominieren, die in der mathematischen Grundausbildung oft angesprochen, aber nicht im Detail ausgeführt werden. Jedes der zwölf Kapitel beginnt mit einem einführenden Vorspann, so dass wir uns an dieser Stelle mit diesem knappen Überblick begnügen können.

Besonders danken möchten wir Herrn Dr. Andreas Rüdinger vom Spektrum-Verlag, der das Projekt initiiert und von den ersten Ideen bis zur Fertigstellung kontinuierlich gestalterisch begleitet hat. Seine kritische Lektüre von Vorabversionen des Texts hat zu zahlreichen Verbesserungen geführt.

Berlin und München, im Oktober 2010

Oliver Deiser, Caroline Lasser
Elmar Vogt, Dirk Werner

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlagen	1
1.1	Die Mathematik und ihre Sprache	2
1.2	Junktoren	4
1.3	Quantoren	6
1.4	Beweise	7
1.5	Menge und Element	9
1.6	Mengenoperationen	12
1.7	Relationen	14
1.8	Funktionen	16
1.9	Äquivalenzrelationen	19
1.10	Partielle und lineare Ordnungen	21
1.11	Existenz und algorithmische Berechenbarkeit	23
1.12	Strukturen und strukturerehaltende Abbildungen	25
	Literaturhinweise	28
2	Zahlen	29
2.1	Natürliche Zahlen	30
2.2	Ganze und rationale Zahlen	33
2.3	Reelle Zahlen	35
2.4	Komplexe Zahlen	37
2.5	Quaternionen	39
2.6	b -adische Darstellungen	40
2.7	Irrationale Zahlen	42
2.8	Algebraische und transzendente Zahlen	44
2.9	Die Zahlen π und e	46
2.10	Infinitesimale Größen	48
2.11	p -adische Zahlen	50
2.12	Zufallszahlen	52
	Literaturhinweise	54

3	Zahlentheorie	55
3.1	Teilbarkeit	56
3.2	Primzahlen und der Fundamentalsatz der Arithmetik	57
3.3	Kongruenzen	59
3.4	Einfache Primzahltests	61
3.5	Das RSA-Verfahren	64
3.6	Die Verteilung der Primzahlen	66
3.7	Quadratische Reste	69
3.8	Kettenbrüche	72
3.9	Rationale Approximationen algebraischer Zahlen; Liouville'sche Zahlen	74
3.10	Diophantische Gleichungen	77
3.11	Elliptische Kurven	79
3.12	Zahlkörper	80
	Literaturhinweise	84
4	Diskrete Mathematik	87
4.1	Kombinatorisches Zählen	88
4.2	Graphen	90
4.3	Euler-Züge	92
4.4	Hamilton-Kreise und das $P \neq NP$ -Problem	94
4.5	Bäume	96
4.6	Färbungen und der Satz von Ramsey	98
4.7	Bipartite Graphen	100
4.8	Matroide	102
4.9	Netzwerke und Flüsse	104
4.10	Kürzeste Wege	106
4.11	Transitivierung von Relationen	108
4.12	Planare Graphen und Minoren	110
	Literaturhinweise	113
5	Lineare Algebra	115
5.1	Vektorräume	116
5.2	Lineare Unabhängigkeit und Dimension	118
5.3	Lineare Abbildungen und Matrizen	120
5.4	Lineare Gleichungssysteme	123
5.5	Determinanten	125
5.6	Euklidische und unitäre Vektorräume	127
5.7	Normierte Vektorräume	129
5.8	Orthogonalität	131
5.9	Dualität	133
5.10	Eigenwerte und Eigenvektoren	135
5.11	Diagonalisierung	137
5.12	Singulärwertzerlegung und Jordan'sche Normalform	139
	Literaturhinweise	141

6	Algebra	143
	6.1 Gruppen	144
	6.2 Ringe	148
	6.3 Körper	150
	6.4 Normalteiler und Faktorgruppen	151
	6.5 Ideale und Teilbarkeit in Ringen	153
	6.6 Endlich erzeugte abelsche Gruppen	155
	6.7 Quotientenkörper	158
	6.8 Polynome	159
	6.9 Körpererweiterungen	162
	6.10 Konstruktionen mit Zirkel und Lineal	163
	6.11 Galoistheorie	164
	6.12 Lösbarkeit polynomialer Gleichungen durch Radikale	168
	Literaturhinweise	170
7	Elementare Analysis	171
	7.1 Folgen und Grenzwerte	172
	7.2 Unendliche Reihen und Produkte	174
	7.3 Stetige Funktionen	176
	7.4 Exponentialfunktion, Logarithmus und trigonometrische Funktionen	178
	7.5 Differenzierbare Funktionen	180
	7.6 Das Riemann'sche Integral	182
	7.7 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	185
	7.8 Vertauschung von Grenzprozessen	187
	7.9 Taylorentwicklung und Potenzreihen	189
	7.10 Fourierreihen	192
	7.11 Fouriertransformation	195
	7.12 Kurven im \mathbb{R}^d	196
	Literaturhinweise	198
8	Höhere Analysis	199
	8.1 Metrische und normierte Räume	200
	8.2 Partielle und totale Differenzierbarkeit	203
	8.3 Mittelwertsatz, Taylorformel und lokale Extrema	205
	8.4 Der Satz von Picard-Lindelöf	206
	8.5 Stabilität von Gleichgewichtspunkten	208
	8.6 Das Lebesgue'sche Maß	210
	8.7 Das Lebesgue'sche Integral	212
	8.8 Der Gauß'sche Integralsatz	215
	8.9 Holomorphe Funktionen	217
	8.10 Der Residuensatz	219
	8.11 Fixpunktsätze	221
	8.12 Der Baire'sche Kategoriensatz	223
	Literaturhinweise	225

9	Topologie und Geometrie	227
9.1	Topologische Räume	228
9.2	Stetige Abbildungen	230
9.3	Beschreibung von Topologien	232
9.4	Produkt Räume und Quotientenräume	233
9.5	Zusammenhang	237
9.6	Trennung	239
9.7	Kompaktheit	240
9.8	Flächen im \mathbb{R}^3	243
9.9	Mannigfaltigkeiten	248
9.10	Homotopie	251
9.11	Homologie	253
9.12	Euklidische und nichteuklidische Geometrie	255
	Literaturhinweise	258
10	Numerik	261
10.1	Die Kondition	262
10.2	Gleitkomma-Arithmetik	264
10.3	Numerische Stabilität	266
10.4	Das Gauß'sche Eliminationsverfahren	269
10.5	Die Methode der kleinsten Quadrate	272
10.6	Eigenwertprobleme	274
10.7	Polynominterpolation	276
10.8	Die schnelle Fouriertransformation	278
10.9	Numerische Integration und Summation	280
10.10	Die Gauß'schen Quadraturverfahren	282
10.11	Runge-Kutta-Verfahren	284
10.12	Das Newton-Verfahren	286
	Literaturhinweise	288
11	Stochastik	291
11.1	Wahrscheinlichkeitsräume	292
11.2	Zufallsvariable	294
11.3	Erwartungswert und Varianz	297
11.4	Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Unabhängigkeit	299
11.5	Null-Eins-Gesetze	301
11.6	Das Gesetz der großen Zahl	302
11.7	Der zentrale Grenzwertsatz	304
11.8	Parameterschätzung	307
11.9	Statistische Tests	309
11.10	Markov'sche Ketten	311
11.11	Irrfahrten	313
11.12	Die Brown'sche Bewegung	314
	Literaturhinweise	316

12	Mengenlehre und Logik	317
12.1	Mächtigkeiten	318
12.2	Das Diagonalverfahren	320
12.3	Die Russell-Antinomie	322
12.4	Die Zermelo-Fraenkel-Axiomatik	324
12.5	Das Auswahlaxiom	326
12.6	Das Zorn'sche Lemma	328
12.7	Paradoxa der Maßtheorie	330
12.8	Berechenbare Funktionen	332
12.9	Formale Beweise und Modelle	334
12.10	Die Gödel'schen Unvollständigkeitssätze	338
12.11	Transfinite Zahlen	340
12.12	Die Kontinuumshypothese	342
	Literaturhinweise	344
	Sachverzeichnis	345